ریاضی ۳ به سبک روحانی

مولف : محمد صادق روحانی گَلمِجانی

تلفن تماس : ۰۹۱۲۱۸۵۹۷۸۰

بسم الله الرحمن الرحیم

مقدمه مولف

این مجموعه شامل درسنامه‌ای کامل به همراه ۳۰۰ سؤال متنوع و حل شده از سؤالات امتحانات نهایی داخل و خارج از کشور به همراه سؤالات مفهومی و تألیفی از متن کتاب درسیه . تمام نکات لازم برای شما ارائه شده . این کتاب با توجه به رویکرد کتاب ریاضی ۳ تدوین شده و سعی کردم کاستی های اونو پوشش بدم . از طرفی نحوه ی نوشتن پاسخ تشریحی ، برای امتحان نهایی هم ارائه شده تا به" اندازه بنویسی و نمره سوال رو کامل بگیری" . تدوین کتاب بطوریه که با استفاده از مفاهیم و سؤالات حل شده قادر به حل سؤالات بعدی باشی . ۷ آزمون شبیه سازی شده امتحان نهایی همراه با پاسخنامه کاملاً تشریحی و "توضیح دار " آوردم تا شما سوالات امتحان نهایی رو قبل از برگزاری دیدار کنید .

برای موفقیت در درس ریاضی باید از حل مثال‌ها و تمرین‌های کتاب درسی شروع کنید و به هیچوجه از آن غافل نشوید سؤالات امتحانات نهایی و حتی کنکور به طور مستقیم از تمرین‌ها و مثال‌های کتاب درسی طراحی می‌شن. آفت موفقیت شما حفظ کردن پاسخ تمریناته! تسلط بر مفاهیم مستلزم فهم درست درسه و اکتفا کردن به خواندن حل مسأله کارساز نیست، دقت کنید که حل هر سؤال برای شما کمکیه برای حل سؤالات جدیدتر و درک مفاهیم اساسی ریاضی از طریق حل مسئله .
دقت به موارد زیر موفقیت شما را افزایش میده :
۱- بررسی موضوعات به صورت تشریحی و مفهومی و هم‌چنین توجه به کاربرد مفاهیم و تعاریف در حل مسئله .
۲- یادگیری عمیق موضوعات با حوصله‌ی زیاد و اینکه روش های مختلف حل یه سوال رو یادبگیری.
۳- بررسی نمونه سوالات حل شده و پس از آن حل تمرین (البته به اعتقاد من مثال های حل شده کتاب رو هم باید اول سعی کنیم خودمون حل کنیم) و در صورت نیافتن راه حل رجوع به پاسخ.
خوبه بدونید ارزش ۵۰ تمرین که خودتون حل می کنید به مراتب بیش‌تر از خوندن و حفظ کردن ۱۰۰۰ تمرین حل شده است، چون مهم‌ترین قسمت یادگیری و کاربردی‌ترین آن برای حل مسأله ریاضی مثال‌ها و تمرین‌هایی است که خودتون به حل آن می‌پردازید.
فرآیند یادگیری ریاضی تدریجیه و در صورت عدم تکرار و تداوم از یاد می‌ره ،بنابراین انتظار نداشته باشید در این درس در کوتاه مدت تسلط کامل پیدا کنید بلکه این مهم آهسته و پیوسته با تمرین مطالب آموخته شده اتفاق می افته . تسلط ومهارت در هر درسی نتیجه تلاش مستمر و پیگیریه .

لطف کنید کمی و کاستی این کتاب را از من دریغ نکنید تا مجموعه بهتری ارائه بشه از صبر و حوصله و دقت شما سپاس بی پایان دارم

از مهندس آرش آریان بابت ویراستاری ودقت نظر تشکر می کنم .

سپاس و عشق ، نثار همسر و فرزندانم که برای تالیف این مختصر وقت بسیاری را از ایشان دریغ داشتم .

کرج اردیبهشت ۱۳۹۸ : محمد صادق روحانی گَلمِجانی

فهرست مطالب

آزمون ها

بارم بندی درس ریاضیات ۳ پایه دوازدهم – سال تحصیلی : ۹۸–۱۳۹۷ ترم اول

فصل	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷
نمره	۷	۵	۵	۳			

بارم بندی درس ریاضیات ۳ پایه دوازدهم – سال تحصیلی : ۹۸–۱۳۹۷ ترم دوم امتحان نهایی

فصل	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷
نمره	۱/۵	۱/۵	۱	۵/۵	۴	۴	۲/۵

دوستان و دانش آموزان عزیزم به تک تک سوالات کتاب درسی حتی سوالات حل شده مراجعه و اونارو حل و بررسی کنید ۳ الی ۴ سوال از تمرینات حل شده " داخل" کتاب میاد عیناً. کار در کلاس ها و فعالیت ها رو جدی بگیرید ومطمئن باشید امتحان نهائی از هر امتحانی راحتتره ، چون دقیقاً بر پایه کتاب درسی و فهم درست مطالب اون طراحی می شه .

جعبه ابزار

۱) $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

۲) $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$

۳) $(a+b)^2+(a-b)^2=2(a^2+b^2)$

۴) $(a+b)^2-(a-b)^2=4ab$

۵) $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$

۶) $a^2+b^2=(a-b)^2+2ab$

۷) $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

۸) $a-b=(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})$

۹) $\forall n\in N \qquad (\sqrt{n+1}+\sqrt{n})(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=1$

۱۰) $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+ac+bc)$

۱۱) $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

۱۲) $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

۱۳) $(a+b)^3=a^3+b^3+3ab(a+b)$

۱۴) $(a-b)^3=a^3-b^3+3ab(a-b)$

۱۵) $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$

۱۶) $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

۱۷) $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$

۱۸) $a^3-b^3=(a-b)^3+3ab(a-b)$

۱۹) $a-b=(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b})(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2})$

۲۰) $a+b=(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b})(\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2})$

۲۱) $(x+a)(a+b)=x^2+(a+b)x+ab$

مساحت ها ، حجم ها و محیط های مهم :

دایره : $S=\pi R^2 \quad , \quad P=2\pi R$

کره : $S=4\pi R^2 \quad , \quad V=\frac{4}{3}\pi R^3$

استوانه : $S=2\pi Rh+2\pi R^2 \quad , \quad V=\pi R^2 h$

مخروط : مولدمخروط $L^2=R^2+h^2 \quad , \quad V=\frac{\pi}{3}R^2 h$

قدر مطلق

۱) $|u|\ge 0 \quad , \quad |u|=0 \ \Rightarrow u=0$

۲) $|u|=|-u| \quad \Rightarrow \quad |u-v|=|v-u|$

۳) $-|u|\le u\le |u|$

۴) $\sqrt[2n]{u^{2n}}=|u|$

۵) $|u|=K \xrightarrow{K>0} u=\pm K$

۶) $|u|=|v| \longrightarrow u=\pm v$

۷) $K>0 \Rightarrow \begin{cases} |u|\le K \Leftrightarrow -K\le u\le K \\ |u|\ge K \Leftrightarrow u\ge K \ \vee \ u\le -K \end{cases}$

۸) $\begin{cases} |uv|=|u||v| \\ \left|\frac{u}{v}\right|=\frac{|u|}{|v|} \qquad v\neq 0 \end{cases}$

فصل ۱ تابع

اعمال روی توابع

بررسی تابع $kf(x)$

برای رسم نمودار kf باید عرض هر نقطه‌ی f را در عدد k ضرب کنیم.

$$(kf)(x)=kf(x) \Rightarrow \begin{cases} D_{kf}=D_f \\ R_{kf}=\{ky \mid y\in R_f\} \end{cases}$$

$$\begin{cases} k>1: & \text{تابع } f \text{ در راستای محور } y \text{ ها با ضریب } k \text{ کشیده می‌شود.} \\ 0<k<1: & \text{تابع } f \text{ در راستای محور } y \text{ ها با ضریب } k \text{ فشرده می‌شود.} \\ -1<k<0: & \text{تابع ابتدا نسبت به محور } x \text{ ها آینه‌وار منعکس می‌شود، سپس با ضریب } |k| \text{ فشرده می‌شود.} \\ k=-1: & \text{تابع فقط نسبت به محور } x \text{ ها آینه‌وار منعکس می‌شود.} \\ k<-1: & \text{تابع نسبت به محور } x \text{ ها منعکس می‌شود، سپس با ضریب } |k| \text{ کشیده می‌شود.} \end{cases}$$

اگر برد تابع $y=f(x)$ بازه‌ی $[m,n]$ باشد، آن‌گاه با فرض مثبت بودن k برد تابع $y=kf(x)$ بازه‌ی $[km,kn]$ می‌باشد و اگر k منفی باشد، برد تابع $y=kf(x)$ بازه‌ی $[kn,km]$ خواهد بود.

دامنه‌ی توابع $f(x)$, $kf(x)$, $f(x)+k$ یکسان‌اند.

بررسی تابع $g(x)=f(kx)$

در این توابع دامنه تغییر می‌کند، اما برد هیچ‌گونه تغییری نمی‌کند.

$$D_f=[a,b] \Rightarrow a\le kx\le b \Rightarrow \begin{cases} \text{if } k>0 \Rightarrow \frac{a}{k}\le x\le \frac{b}{k} \\ \text{if } k<0 \Rightarrow \frac{a}{k}\ge x\ge \frac{b}{k} \end{cases} \Rightarrow D_g=\left\{\frac{x}{k} \,\middle|\, x\in D_f\right\}$$

$$\begin{cases} g(x)=f(kx) \\ |k|<1 \quad \text{کشیدگی} \\ |k|>1 \quad \text{فشردگی} \end{cases}$$

نکته

✹ برای رسم $f(ax+b)$ ابتدا انتقال عدد ثابت b را انجام می دهیم . سپس تغییرات مربوط به ضریب x را روی شکل اعمال می کنیم .

برای رسم نمودار $f(ax)$ اگر $(0<a<1)$ باشد نمودار تابع $f(x)$ را در راستای محور x ها با ضریب $\frac{1}{a}$ منبسط می کنیم . طول ها $\frac{1}{a}$ برابر می شوند .

اگر $(a>1)$ نمودار تابع $f(x)$ در راستای محور x ها با ضریب $\frac{1}{a}$ منقبض می شود . طول ها $\frac{1}{a}$ برابر می شوند .

نکته

✸اگر نقطه $\mathbf{A}$ روی نمودار تابع $f(x)$ باشد نقطه نظیر آن روی تابع $g(x)=f(ax+b)$ برابراست با :

$$\text{if}\quad A(x_{\circ},y_{\circ})\in f(x) \qquad A'\left|\begin{matrix}\dfrac{x_{\circ}-b}{a}\\ y_{\circ}\end{matrix}\right. \in g(x)=f(ax+b)$$

$$\text{if}\quad A(x_{\circ},y_{\circ})\in f(x) \qquad A'\left|\begin{matrix}\dfrac{x_{\circ}-b}{a}\\ ky_{\circ}\pm k'\end{matrix}\right. \in g(x)=kf(ax+b)\pm k'$$

نکته

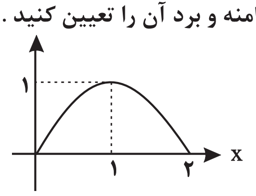
✸ بررسی تابع $y=f(x-a)$ $(a>\circ)$

برای رسم منحنی آن کافی است نمودار تابع f را a واحد در امتداد مثبت محور x ها انتقال دهیم .

✸ بررسی تابع $y=f(x+a)$ $(a>\circ)$

برای رسم منحنی آن کافی است نمودار تابع f را a واحد در امتداد منفی محور x ها انتقال دهیم .

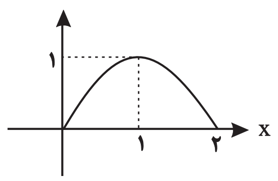
۱) نمودار تابع معین $y=f(x)$ در شکل روبه‌رو داده شده است. نمودار تابع $g(x)=f(-۲x)$ را رسم کنید، سپس دامنه و برد آن را تعیین کنید .

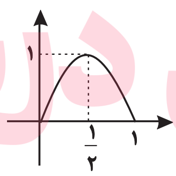


☑پاسخ:

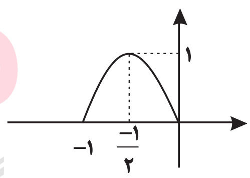
طرفین نامساوی رو بر -۲ تقسیم — حالا باید $-۲x$ تو دامنه f باشه — در تابع f ، x باید

$$D_f=[\circ,۲]\ ,\ R_f=[\circ,۱]\ \Rightarrow f(x)\Rightarrow \circ\le x\le ۲\ \Rightarrow f(-۲x)\ \Rightarrow\ \circ\le -۲x\le ۲\ \Rightarrow\ -۱\le x\le \circ$$





فشردگی طولی به خاطر ضریب ۲ واحدی x داخل پرانتز



تقارن طولی به خاطر منفی داخل پرانتز

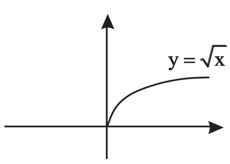
$$D_g=[-۱,\circ]\quad ,\quad R_g=[\circ,۱]$$

نکته برد توابع $f(x)$, $f(kx)$, $f(x+k)$ یکسان‌اند.

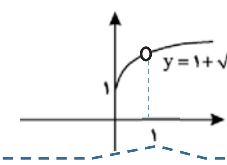
۲) به کمک نمودار تابع $y=\sqrt{x}$ نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\dfrac{۱-x}{۱-\sqrt{x}}$ را رسم کنید.

☑پاسخ: برای هر کاری به جز دامنه گرفتن، اول تا جای ممکن تابع را ساده کنید. (ثواب داره !)

$$f(x)=\frac{۱-x}{۱-\sqrt{x}}=\frac{(۱-\sqrt{x})(۱+\sqrt{x})}{۱-\sqrt{x}}=۱+\sqrt{x}$$

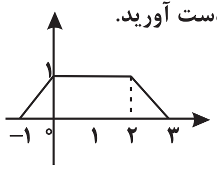


حالا شکل $\sqrt{x}$ رو یه واحد می‌بریم بالا



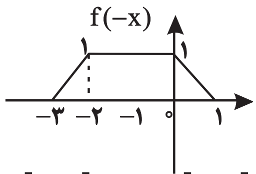
اینجا بخاطر دامنه تابع کسری ، تابع سوراخ داره

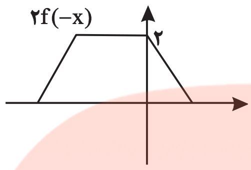
۳) اگر نمودار $y=f(x)$ شکل روبه‌رو باشد، نمودار تابع $g(x)=۲f(-x)-۱$ را رسم کنید و دامنه و برد $g(x)$ را به دست آورید.

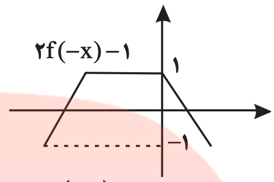


☑پاسخ:

یعنی x های دامنه را قرینه کن. y ها رو دو برابر کن (کشیدگی عرضی) یک واحد ببر پایین

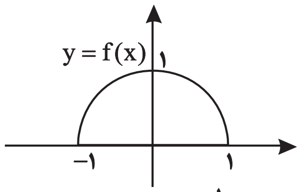






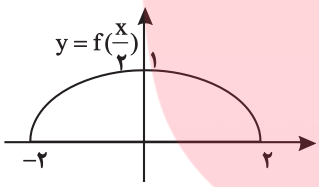
$D_f=[-۱,۳]$, $D_g=[-۳,۱]$, $۰\le f(x)\le ۱$ $۰\le f(-x)\le ۱ \Rightarrow ۰\le ۲f(-x)\le ۲ \Rightarrow -۱\le ۲f(-x)-۱\le ۱$

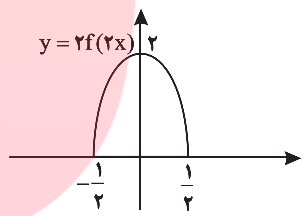
۴) نمودار $f(x)$ شکل مقابل است. نمودار توابع $f\left(\frac{x}{۲}\right)$, $g(x)=۲f(۲x)$ را رسم کنید.



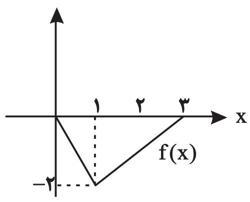
☑پاسخ:

فشردگی طولی به خاطر ضریب دو واحدی x و کشیدگی عرضی به خاطر ضریب دو واحدی f کشیدگی طولی به خاطر ضریب $\frac{۱}{۲}$ واحدی x



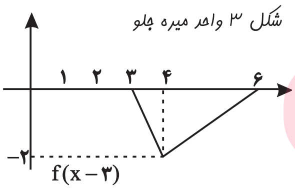


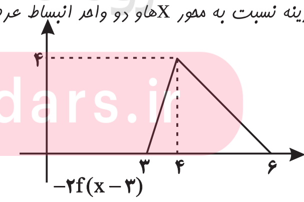
۵) در زیر نمودار تابع $y=f(x)$ رسم شده است. با استفاده از انتقال ابتدا نمودار تابع $y=f(x-۳)$ را رسم کرده و سپس نمودار تابع $y=-۲f(x-۳)$ را رسم کنید. (خرداد ۹۱)



☑پاسخ:

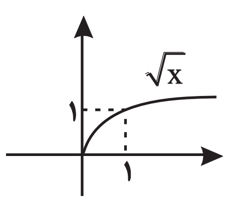
شکل ۳ واحد میره جلو شکل قرینه نسبت به محور Xها و دو واحد انبساط عرضی دارد.

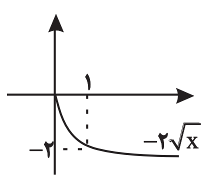




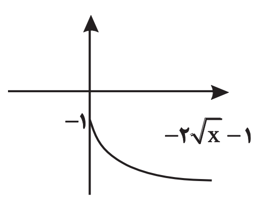
۶) ابتدا نمودار تابع $f(x)=\sqrt{x}$ را رسم نموده، سپس با استفاده از آن نمودار تابع $g(x)=-۲f(x)-۱$ را رسم کنید.(خرداد ۹۲)

☑پاسخ:





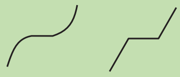
۱ واحد میره پایین



توابع صعودی و توابع نزولی

تابع صعودی: تابع $y=f(x)$ را صعودی می‌نامند هرگاه با بزرگ شدن مقدار متغیر x، مقدار تابع یعنی y نیز بزرگ شود و یا ثابت بماند.

$$\forall\ x_۱,x_۲\in D_f:\ x_۱<x_۲\ \Rightarrow\ f(x_۱)\le f(x_۲)$$

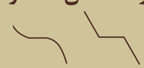


تابع $y=f(x)$ را صعودی اکید می‌نامند هرگاه با بزرگ شدن مقدار متغیر x، مقدار تابع یعنی y نیز بزرگ شود.

$$\forall x_۱,x_۲\in D_f:\ x_۱<x_۲\ \Rightarrow\ f(x_۱)<f(x_۲)$$

تابع نزولی: تابع $y=f(x)$ را نزولی می‌نامند، هرگاه با بزرگ شدن مقدار متغیر x، مقدار تابع یعنی y کاهش یابد و یا ثابت بماند.

$$\forall\ x_۱,x_۲\in D_f:\ x_۱<x_۲\Rightarrow f(x_۱)\ge f(x_۲)$$



تابع $y=f(x)$ را نزولی اکید می‌نامند، هرگاه با بزرگ شدن مقدار متغیر x ، مقدار تابع یعنی y نیز کاهش یابد.

$$\forall\ x_۱,x_۲\in D_f:\ x_۱<x_۲\Rightarrow f(x_۱)>f(x_۲)$$

نکته

۱. در هر بازه که تابع ثابت باشه، هم می‌توان گفت صعودیه و هم نزولی چون در تعریف هر دو صدق می‌کنه.

۲. هر تابعی که در دامنه‌اش صعودی اکید (یا نزولی اکید) باشد، یک به یک و در نتیجه وارون پذیر است. ولی ممکن تابعی یک به یک باشه ولی یکنوا نباشه مثل تابع : $y=\frac{۱}{x}$

روش حل مسئله

۱) اول از $x_۱<x_۲$ متعلق به دامنه تابع شروع کنید و سعی نمایید $f(x_۱)$ و $f(x_۲)$ بسازید.

۲) دقت کنید کدام نامساوی برقرار است $f(x_۱)\le f(x_۲)$ یا $f(x_۱)\ge f(x_۲)$ اولی یعنی صعودی بودن تابع و دومی یعنی نزولی بودن آن

۷) نشان دهید تابع $f:(۰,+\infty)\to R$ با ضابطه‌ی $f(x)=\frac{۱}{۱+x^۲}$ نزولی اکید است.

☑پاسخ:

$$۰<x_۱<x_۲\ \Rightarrow\ ۰<(x_۱)^۲<(x_۲)^۲\Rightarrow ۱+(x_۱)^۲<۱+(x_۲)^۲\Rightarrow\frac{۱}{۱+(x_۱)^۲}>\frac{۱}{۱+(x_۲)^۲}\Rightarrow f(x_۱)>f(x_۲)$$

۸) صعودی یا نزولی بودن تابع $f(x)=\sqrt{۲x-۴}$ را روی دامنه‌اش بررسی کنید.

☑پاسخ:

$$f(x)=\sqrt{۲x-۴}\quad\Rightarrow\quad ۲x-۴\ge۰\quad\Rightarrow\quad x\ge۲\quad\Rightarrow\quad D_f=[۲,+\infty)$$

$$x_۱<x_۲\quad\Rightarrow\quad ۲x_۱<۲x_۲\Rightarrow ۲x_۱-۴<۲x_۲-۴\quad\Rightarrow\quad\sqrt{۲x_۱-۴}<\sqrt{۲x_۲-۴}\quad\Rightarrow\quad f(x_۱)<f(x_۲)$$

تابع در دامنه‌اش صعودی است.

۹) با استفاده از ضابطه‌ی، صعودی یا نزولی بودن تابع : $f(x)=-۲(x+۱)^۳-۱$ را بررسی کنید.

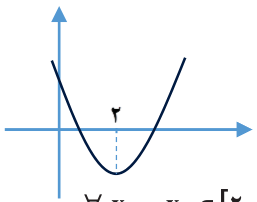
☑پاسخ: $x_۱<x_۲\ \Rightarrow ۲(x_۱+۱)^۳<۲(x_۲+۱)^۳\Rightarrow\ -۲(x_۱+۱)^۳-۱>-۲(x_۲+۱)^۳-۱\ \Rightarrow\ f(x_۱)>f(x_۲)\ \Rightarrow$

بنابراین تابع نزولی است.

۱۰) در تابع با ضابطه ی $f(x)=x^2-4x+1$ دامنه تابع را به گونه ای محدود کنید که تابع اکیداً صعودی باشد .

☑پاسخ:

راس این سهمی $x=\frac{-b}{2a}=\frac{4}{2}=2$ و چون $a=1>0$ دهنه سهمی رو به بالاست و از $x=2$ به بعد تابع صعودی است .



اینم اثباتش

بایر نشون بریم

$\forall\, x_1\ ,\ x_2 \in [2,+\infty) \qquad x_1<x_2 \Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$

چون x ها بزرگتر از ۲ اند داریم

$x_1<x_2 \Rightarrow (x_1-2)<(x_2-2) \Rightarrow (x_1-2)^2<(x_2-2)^2 \Rightarrow (x_1-2)^2-3<(x_2-2)^2-3$

$x_1^2-4x_1+1 < x_2^2-4x_2+1 \Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$

روش حل مسئله

۱) نمودار تابع را رسم کنید.

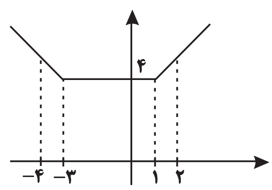
۲) برای هر بازه به صورت مجزا صعودی یا نزولی بودن را بررسی کنید.

۱۱) با رسم نمودار تابع $y=|x-1|+|x+3|$ مشخص کنید تابع در چه بازه ای صعودی و در چه بازه ای نزولی است؟ (شهریور ۹۳)

☑پاسخ:

$y=|x+3|+|x-1| \Rightarrow \begin{cases} x=-3 & \text{ریشه قدر مطلق اول} \\ x=1 & \text{ریشه قدر مطلق دوم} \end{cases}$

$f(x)=\begin{cases} -2x-2 & x<-3 \\ 4 & -3\le x\le 1 \\ 2x+2 & x>1 \end{cases}$



x	۴-	۳-	۱	۲
y	۶	۴	۴	۶

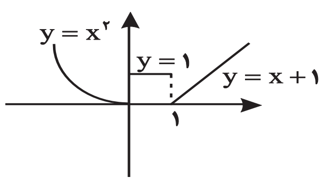
نزولی $\forall x\in(-\infty,-3)$ ثابت $\forall x\in(-3,1]$ صعودی $\forall x\in(1,+\infty)$

۱۲) ابتدا نمودار تابع زیر را رسم کنید، سپس بازه‌هایی را که در آن تابع صعودی اکید، نزولی اکید یا ثابت است را مشخص کنید. (شهریور ۹۲)

$f(x)=\begin{cases} x^2 & x<0 \\ 1 & 0\le x\le 1 \\ x-1 & x>1 \end{cases}$

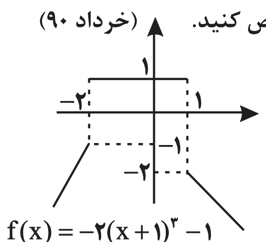
☑پاسخ:

۱۳) تابع در بازه‌ی $(-\infty,0)$ اکیداً نزولی است در بازه‌ی $[0,1]$ ثابت و در بازه‌ی $(1,+\infty)$ اکیداً صعودی است.



۱۴) تابع $f(x)=\begin{cases} x+1 & x<-2 \\ 1 & -2<x<1 \\ -2x & x>1 \end{cases}$ را رسم کنید و بازه‌هایی که در آن تابع صعودی، نزولی یا ثابت است را مشخص کنید. (خرداد ۹۰)

☑پاسخ: تابع در بازه‌ی $(-\infty,-2)$ صعودی است و در بازه‌ی $(-2,1)$ ثابت و در بازه‌ی $(1,+\infty)$ نزولی است.

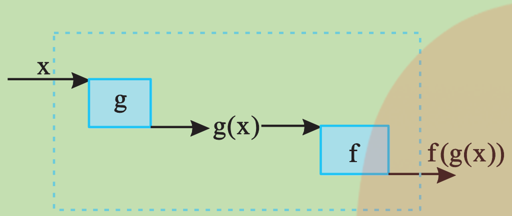


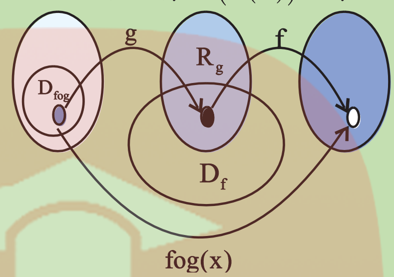
ترکیب توابع

اگر $A \xrightarrow{f} B$, $C \xrightarrow{g} D$ آن‌گاه $C \xrightarrow{fog} B$ به شکل زیر تعریف می‌شود.

$$\begin{cases} y = fog(x) = f(g(x)) \\ D_{fog} = \{x \in D_g : g(x) \in D_f\} \end{cases}$$

اگر برد $g(x)$ اشتراکی با دامنه‌ی تابع $f(x)$ نداشته باشد، $f(g(x))$ قابل تشکیل نیست. حال اگر $R_g \cap D_f \neq \phi$ آن‌گاه با جای گزینی $g(x)$ به جای x در ضابطه‌ی $f(x)$، تابع fog تشکیل می‌شود.





۱۵) اگر $f = \{(-۱,۱),(۱,۲),(۲,۳),(۴,۵)\}$, $g = \{(-۱,۰),(۱,۲),(۲,۴),(۵,۳)\}$ دو تابع باشند: (شهریور ۹۵)

تابع fog را به صورت زوج مرتب بنویسید.

$$\left|\begin{array}{l} -۱ \xrightarrow{g} ۰ \xrightarrow{f} \times \\ ۱ \xrightarrow{g} ۲ \xrightarrow{f} ۳ \Rightarrow (۱,۳) \in fog \\ ۲ \xrightarrow{g} ۴ \xrightarrow{f} ۵ \Rightarrow (۲,۵) \in fog \\ ۵ \xrightarrow{g} ۳ \xrightarrow{f} \times \end{array}\right. \Rightarrow fog = \{(۱,۳),(۲,۵)\}$$

۱۶) اگر $g = \left\{(۲,\sqrt{۲}),(-۱,۲),\left(\frac{۱}{۴},۳\right),\left(۱,\frac{۳}{۲}\right)\right\}$, $f = \left\{(۰,۲),(۱,-۱),\left(۳,\frac{-۱}{۴}\right),(-۲,۳),(-۱,۰)\right\}$ باشند، تابع gof را بدست آورید. (خرداد ۹۴)

☑ پاسخ:

$$۰ \xrightarrow{f} ۲ \xrightarrow{g} \sqrt{۲} \Rightarrow (۰,\sqrt{۲}) \in gof$$
$$۱ \xrightarrow{f} -۱ \xrightarrow{g} ۲ \Rightarrow (۱,۲) \in gof$$
$$۳ \xrightarrow{f} \frac{-۱}{۴} \xrightarrow{g} \times$$
$$-۲ \xrightarrow{f} ۳ \xrightarrow{g} \times$$
$$-۱ \xrightarrow{f} ۰ \xrightarrow{g} \times$$

اینا به جایی نمیرن

$$gof = \{(۰,\sqrt{۲}) , (۱,۲)\}$$

۱۷) اگر $f(x) = \sqrt{x-۳}$, $g = \{(۰,۴),(۳,۲),(۵,۶)\}$ دو تابع باشند. (خرداد ۹۱)

الف) تابع fog را به صورت زوج های مرتب بنویسید.

ب) دامنه‌ی تابع $\frac{f}{g}$ را بنویسید.

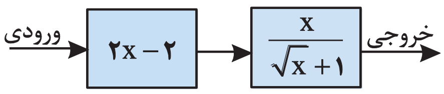
☑ پاسخ:

$$\begin{cases} ۰ \xrightarrow{g} ۴ \xrightarrow{f=\sqrt{x-۳}} ۱ \Rightarrow (۰,۱) \\ ۳ \xrightarrow{g} ۲ \xrightarrow{f=\sqrt{x-۳}} \sqrt{۲-۳} \\ ۵ \xrightarrow{g} ۶ \xrightarrow{f=\sqrt{x-۳}} \sqrt{۳} \Rightarrow (۵,\sqrt{۳}) \end{cases} \Rightarrow fog = \{(۰,۱),(۵,\sqrt{۳})\}$$

تعریف نشده

$$D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x : g(x) = ۰\} \Rightarrow D_{\frac{f}{g}} = \{۳,۵\}$$

۱۸) اگر خروجی از ماشین شکل مقابل $\frac{۴}{۳}$ باشد، مقدار ورودی کدام است؟

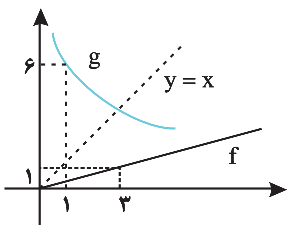


☑پاسخ:

$$\frac{x}{\sqrt{x}+۱}=\frac{۴}{۳} \Rightarrow x=۴ \Rightarrow ۲x-۲=۴ \Rightarrow ۲x=۶ \Rightarrow x=۳$$

۱۹) شکل مقابل نمودارهای توابع f,g است و f تابعی خطی می‌باشد، $gof(۳)+fog(۱)$ کدام است؟

☑پاسخ:



$$f(x)=\frac{۱}{۳}x \Rightarrow$$

تابع f خطی ، و با شیب $\frac{۱}{۳}$ و گذرا از مبدأ است.
بنابراین معادله آن به این صورت می‌باشد.

$$f(g(۱))=f(۶)=\frac{۱}{۳}(۶)=۲$$
$$g(f(۳))=g(۱)=۶$$
$$gof(۳)+fog(۱)=۶+۲=۸$$

نکته

تعداد زیادی از سوالات ترکیب دو تابع مربوط به تعیین دامنه ترکیب دو تابع بدون تشکیل ضابطه و از راه تعریف است. دقت کن :

$$D_{fog}=\{x\in D_g : g(x)\in D_f\}$$
$$D_{gof}=\{x\in D_f : f(x)\in D_g\}$$
$$D_{fof}=\{x\in D_f : f(x)\in D_f\}$$

روش حل مسئله

۱) ابتدا دامنه دو تابع را به دست آورید.

۲) فرمول دامنه ترکیب رو با توجه به یکی از سه مورد بالا بنویسید.

۳) با استفاده از فرمول و محدودیت های هر دامنه، دامنه ترکیب را حساب کنید.

۲۰) توابع $f(x)=\sqrt{x-۱}$, $g(x)=\frac{۱}{x}$ مفروض‌اند. (خرداد ۸۵)

الف) بدون تشکیل ضابطه‌ی fog دامنه را تعیین کنید. ب) در صورت وجود، ضابطه‌ی gof را بنویسید.

☑پاسخ:

الف) $D_{fog}=\{x\in D_g=R-\{۰\} \mid g(x)\in D_f=[۱,+\infty)\}=\{x \mid x\in R-\{۰\} , \frac{۱}{x}\geq ۱\}=\{x \mid x\in R-\{۰\} , x\leq ۱\}=(-\infty,۱]-\{۰\}$

ب) $gof=g(\sqrt{x-۱})=\frac{۱}{\sqrt{x-۱}}$

یعنی در تابع g بجای x ، ضابطه $f(x)$ رو قرار بده

۲۱) اگر $f(x)=\sqrt{x+|x|}$ ، $g(x)=\dfrac{1}{x^2-4x}$ باشد دامنه‌ی تابع gof کدام است؟

☑پاسخ: $f(x)=x+|x|=\begin{cases}\sqrt{2x} & x\geq 0\\ 0 & x<0\end{cases} \Rightarrow x+|x|\geq 0 \Rightarrow D_f=R$ ، $D_g=R-\{0,4\}$

می‌دانیم: $\forall x\in(-\infty,0] \Rightarrow \sqrt{x+|x|}=0$ ، $\sqrt{x+|x|}=4 \Rightarrow \sqrt{2x}=4 \Rightarrow 2x=16 \Rightarrow x=8$

در نتیجه: $D_{gof}=\{x : x\in R \ \ni \ \sqrt{x+|x|}\neq 0,4\}=(0,+\infty)-\{8\}$

۲۲) اگر $f(x)=\dfrac{1}{x-1}$ ، $g(x)=\sqrt{x-3}$ دو تابع باشند. (خرداد ۹۲)

الف) مقدار $3(f-g)(4)$ را به دست آورید. ب) دامنه تابع fog را بیابید.

☑پاسخ:

الف) $3(f-g)(4)=3\left(\dfrac{1}{4-1}-\sqrt{4-3}\right)=-2$

ب) $D_f=R-\{1\}$, $D_g=[3,+\infty) \Rightarrow D_{fog}=\{x\,|\,x\in D_g \ , \ g(x)\in D_f\}=\{x\,|\,x\in[3,+\infty) \ , \ \sqrt{x-3}\neq 1\}=[3,+\infty)-\{4\}$

۲۳) اگر $g(x)=\dfrac{1}{x-3}$ ، $f(x)=3x-2$ باشد، آن‌گاه حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید. (خرداد ۹۰)

الف) $(3f+2g)(4)$ ب) D_{fog}

☑پاسخ:

الف) $3f=3(3x-2)=9x-6$ ، $2g=\dfrac{2}{x-3} \Rightarrow 3f+2g=(9x-6)+\left(\dfrac{2}{x-3}\right)\Rightarrow(3f+2g)(4)=32$

ب) $D_{fog}=\left\{x\in D_g=R-\{3\}\,\middle|\,\dfrac{1}{x-3}\in D_f=R\right\}=R-\{3\}$

۲۴) توابع $f(x)=\sqrt{\dfrac{3x-2}{1-x}}$ ، $g(x)=2x$ مفروض‌اند. دامنه تابع $fog(x)$ را محاسبه کنید. (خرداد ۹۳- خارج کشور)

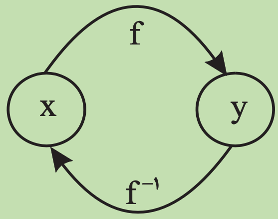
☑پاسخ: $D_g=R$ ، $D_f=\left[\dfrac{2}{3},1\right)$ ،

x		$\frac{2}{3}$		1	
$\dfrac{3x-2}{1-x}$	$-$	0	$+$		$-$

$D_{fog}=\{x\in D_g \mid g(x)\in D_f\}=\left\{x\in R\mid 2x\in\left[\dfrac{2}{3},1\right)\right\}=\left\{x\in R\mid \dfrac{2}{3}\leq 2x<1\right\}=\left\{x\in R\mid \dfrac{1}{3}\leq x<\dfrac{1}{2}\right\}=\left[\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{2}\right)$

تابع وارون

اگر f تابعی یک به یک باشد، معکوس‌پذیر و معکوس تابع f به صورت زیر است.



$$f^{-۱}=\{(y,x)|(x,y)\in f\}$$

$$D_{f^{-۱}}=R_f \qquad D_f=R_{f^{-۱}}$$

$$\forall x\in D_{f^{-۱}} \quad f\left(f^{-۱}(x)\right)=x \qquad \forall x\in D_f \quad f^{-۱}\left(f(x)\right)=x$$

ترکیب هر تابع با تابع معکوس خود حتماً تابع همانی است. و اگر $f(a)=b$ آن‌گاه $f^{-۱}(b)=a$

نکته

۱) نمودار توابع $f,f^{-۱}$ نسبت به خط $y=x$ متقارن‌اند.

۲) نمودار $f,f^{-۱}$ در صورت تقاطع عموماً یکدیگر را روی خط $y=x$ قطع می‌کنند. (نه همیشه)

۳) ممکن است نمودار $f,f^{-۱}$ بر هم منطبق باشند، مانند: $y=\frac{۱}{x}$ و یا یکدیگر را قطع نکنند، مانند:

$$f^{-۱}(x)=\log_{۲}^{x} \quad , \quad f(x)=۲^x$$

روش حل مسئله

۱) ابتدا ثابت کنید تابع یک به یک است. (قسمت خسته‌ی کار) این طوری:

$$\forall x_۱,x_۲\in D_f:\ f(x_۱)=f(x_۲) \Rightarrow x_۱=x_۲$$

کمتر سوال میاد ، بیشتر می خواد که ضابطه تابع معکوس رو مستقیم به دست بیارید

۲) تابع را بر حسب x بنویسید یعنی از ضابطه‌ی داده شده x رو بر حسب y تنها کنید. (قسمت سخت کار)

۳) درنهایت تابع حاصل را به صورت $y=f^{-۱}(x)$ بنویسید.

۲۵) معکوس توابع زیر کدام است؟

۱) $y=ax+b$ ۲) $f(x)=x^۳+۳x^۲+۳x$

☑پاسخ:

۱) $y=ax+b \Rightarrow ax=y-b \Rightarrow x=\frac{y-b}{a} \Rightarrow f^{-۱}(x)=\frac{x-b}{a}$

۲) $f(x)=x^۳+۳x^۲+۳x \Rightarrow y=x^۳+۳x^۲+۳x+۱-۱=(x+۱)^۳-۱ \Rightarrow y+۱=(x+۱)^۳ \Rightarrow \sqrt[۳]{y+۱}=x+۱$

$x=\sqrt[۳]{y+۱}-۱ \Rightarrow f^{-۱}(x)=\sqrt[۳]{x+۱}-۱$

مکعب کامل می‌کنیم

۲۶) در توابع زیر مقادیر خواسته شده را به دست آورید.

☑پاسخ:

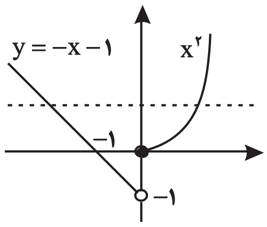
$$f(x)=\frac{۳x+۱}{x-۱} \Rightarrow f^{-۱}(۷)=? \Rightarrow \frac{۳x+۱}{x-۱}=۷ \Rightarrow ۷x-۷=۳x+۱ \Rightarrow ۴x=۸ \Rightarrow x=۲ \Rightarrow f^{-۱}(۷)=۲$$

$$f(x)=x^۲-۲x\ ,\ x\le ۲ \Rightarrow f^{-۱}(۵)=? \Rightarrow x^۲-۲x=۵ \Rightarrow x^۲-۲x-۵=۰ \Rightarrow x=\frac{۲\pm\sqrt{۲۴}}{۲}=\begin{cases}۱+\sqrt{۶} & \text{ق}\\ ۱-\sqrt{۶} & \text{ق}\end{cases}$$

۲۷) به کمک رسم نمودار ثابت کنید تابع زیر وارون پذیر نیست. (خرداد ۹۴)

$$f(x)=\begin{cases}x^2 & x\geq 0\\ -x-1 & x<0\end{cases}$$

☑پاسخ: مطابق شکل خطوط افقی $y=k\geq 0$ منحنی تابع را در بیش از یک نقطه قطع می‌کند. بنابراین تابع یک به یک نیست پس معکوس پذیر هم نخواهد شد.



۲۸) تحقیق کنید آیا دو تابع $f(x)=\frac{1}{x}+3$, $g(x)=\frac{1}{x-3}$ وارون یکدیگرند؟ (شهریور ۹۴)

☑پاسخ: اولاً تابع $f(x)$ یک به یک است چون

$$f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow x_1=x_2 \quad\rightarrow\quad \frac{1}{x_1}+3=\frac{1}{x_2}+3\Rightarrow \frac{1}{x_1}=\frac{1}{x_2}\quad\Rightarrow x_1=x_2$$

حال معکوس آن را به دست می‌آوریم.

$$y=\frac{1}{x}+3\Rightarrow \frac{1}{x}=y-3\ \Rightarrow\ x=\frac{1}{y-3}\ \Rightarrow\ f^{-1}(x)=\frac{1}{x-3}=g(x)$$

۲۹) وارون پذیری تابع $y=\frac{2x+1}{x-1}$ را بررسی کنید و در صورت امکان ضابطه‌ی تابع وارون را به دست آورید. (شهریور ۹۴ خارج کشور)

☑پاسخ:

$$f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow \frac{2x_1+1}{x_1-1}=\frac{2x_2+1}{x_2-1}\Rightarrow (2x_1+1)(x_2-1)=(2x_2+1)(x_1-1)$$

$$\Rightarrow 2x_1x_2-2x_1+x_2-1=2x_2x_1-2x_2+x_1-1\Rightarrow x_1=x_2$$

$$y=\frac{2x+1}{x-1}\ \Rightarrow\ yx-y=2x+1\ \Rightarrow\ yx-2x=y+1\ \Rightarrow\ x=\frac{y+1}{y-2}\ \Rightarrow\ f^{-1}(x)=\frac{x+1}{x-2}$$

۳۰) نشان دهید تابع $f(x)=1+\sqrt[3]{x-5}$ وارون پذیر است، سپس وارون آن را بنویسید.

☑پاسخ: اول باید نشان دهیم تابع وارون‌پذیر است، یعنی باید نشان دهیم تابع یک به یک است.

$$f(x_1)=f(x_2)\ \Rightarrow\ x_1=x_2:\ 1+\sqrt[3]{x_1-5}=1+\sqrt[3]{x_2-5}\ \Rightarrow\ \sqrt[3]{x_1-5}=\sqrt[3]{x_2-5}\ \Rightarrow\ x_1-5=x_2-5\Rightarrow\ x_1=x_2$$

$$y=1+\sqrt[3]{x-5}\ \Rightarrow\ y-1=\sqrt[3]{x-5}\ \Rightarrow\ (y-1)^3=(x-5)\ \Rightarrow\ x=(y-1)^3+5\ \Rightarrow\ f^{-1}(x)=(x-1)^3+5$$

۳۱) ثابت کنید تابع $f(x)=(x-2)^2$, $x\geq 2$ وارون‌پذیر است، سپس ضابطه‌ی وارون آن را بنویسید. (خرداد ۹۱)

☑پاسخ:

اثبات معکوس پذیری

$$f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow(x_1-2)^2=(x_2-2)^2\ \longrightarrow\ |x_1-2|=|x_2-2|\ \xrightarrow{x\geq 2}\ x_1=x_2$$

$$y=(x-2)^2\ \Rightarrow\ \sqrt{y}=\sqrt{(x-2)^2}\ \Rightarrow\ \sqrt{y}=|x-2|\ \xrightarrow{x\geq 2}\ \sqrt{y}=x-2\quad x=\sqrt{y}+2\ \Rightarrow\ f^{-1}(x)=\sqrt{x}+2$$

۳۲) وارون پذیری تابع زیر را بررسی کنید و در صورت وارون‌پذیری تابع، ضابطه‌ی وارون آن را به دست آورید. (شهریور ۹۲)

$$f(x)=\sqrt{x+3}-5$$

☑پاسخ:

$$f(x_1)=f(x_2)\ \Rightarrow\ x_1=x_2\quad\longrightarrow\quad \sqrt{x_1+3}-5=\sqrt{x_2+3}-5\ \Rightarrow\ x_1+3=x_2+3\ \Rightarrow\ x_1=x_2$$

$$y=\sqrt{x+3}-5\Rightarrow y+5=\sqrt{x+3}\ \Rightarrow\ (x+3)=(y+5)^2\ \Rightarrow\ x=(y+5)^2-3\ \Rightarrow\ f^{-1}(x)=(x+5)^2-3$$

۳۳) اگر $f(a)=۳ax-۵$ و نقطه‌ی $(۴,۳)$ روی نمودار تابع f^{-1} باشد، اولاً مقدار a را به دست آورید. ثانیاً ضابطه‌ی تابع وارون f را تعیین کنید.

☑پاسخ:

$$(۴,۳)\in f^{-1} \Rightarrow (۴,۳)\in f \Rightarrow f(۳)=۳a(۳)-۵=۴ \Rightarrow ۹a=۹ \Rightarrow a=۱$$

$$f(x)=۳x-۵ \Rightarrow y=۳x-۵ \Rightarrow y+۵=۳x \Rightarrow x=\frac{y+۵}{۳} \Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{x+۵}{۳}$$

نکته

۱) $(fog)^{-1}=g^{-1}of^{-1}$

۲) در توابع‌ای با ضابطه‌ی $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$ (توابع هموگرافیک) اگر $a+d=0$ باشد، آن‌گاه تابع و تابع معکوس با هم برابرند.

یعنی : $f(x)=f^{-1}(x)$

۳۴)اگر $f(x)=۴x-۳$, $g(x)=x+۲$ تابع $(gof)^{-1}$ را حساب کنید. (شهریور ۹۰)

پاسخ:

$$y=۴x-۳ \Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{x+۳}{۴} \quad , \quad y=x+۲ \Rightarrow g^{-1}(x)=x-۲$$

$$(gof)^{-1}=f^{-1}og^{-1}=f^{-1}\left(g^{-1}(x)\right)=\frac{x-۲+۳}{۴}=\frac{x+۱}{۴}$$

۳۵) اگر $f(x)=۱+\sqrt{x}$, $g(x)=x^۲$, $x>۰$ آن‌گاه ضابطه‌ی $g^{-1}of^{-1}$ کدام است؟

☑پاسخ:

$$y=۱+\sqrt{x} \Rightarrow f^{-1}(x)=(x-۱)^۲ \quad , \quad y=x^۲ \Rightarrow g^{-1}(x)=\sqrt{x}$$

$$g^{-1}of^{-1}=\sqrt{(x-۱)^۲}=|x-۱|$$

۳۶) تابع وارون $y=x^۳$، تابع .... است. (دی ماه ۹۰)

☑پاسخ:

$$y=f^{-1}(x)=\sqrt[۳]{x}$$

۳۷)در ماشین زیر ضابطه تابع g را تعیین کنید.

$$x \longrightarrow \boxed{x^۳+۱} \longrightarrow \boxed{g} \longrightarrow x$$

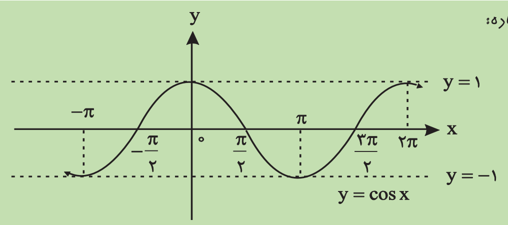
☑پاسخ:

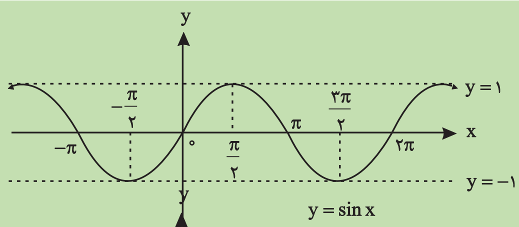
$$g(x)=f^{-1}$$

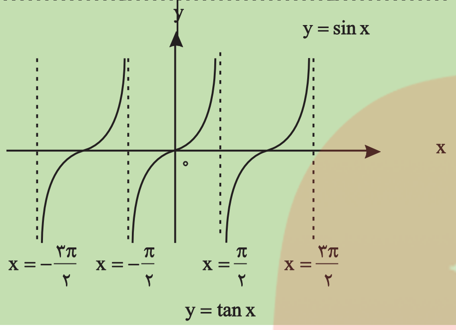
$$f(x)=x^۳+۱ \Rightarrow y=x^۳+۱ \Rightarrow y-۱=x^۳ \Rightarrow \sqrt[۳]{y-۱}=x \Rightarrow f^{-1}(x)=\sqrt[۳]{x-۱}$$

فصل ۲ مثلثات

نمودار توابع مثلثاتی ساده:





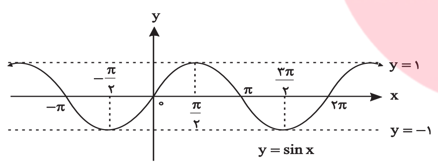


دوره تناوب

تابع با ضابطه ی $y=f(x)$ با دامنه D_f را در دامنه اش متناوب می گویند ، هرگاه عدد حقیقی و ناصفر T وجود داشته باشد به طوری که در دو شرط زیر صدق کند .

$$1)\ \forall x\in D_f \quad (x\pm T)\in D_f \quad , \quad 2)\ \forall x\in D_f \quad f(x\pm T)=f(x)$$

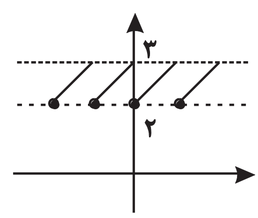
این یعنی اینکه شکل تابع در فاصله های T واحدی تکراریه مثل تابع سینوس که در فاصله های 2π واحدی تکرار میشه



۳۸) تابع $y=x-\lfloor x-2\rfloor$ مفروض است.

۱) نمودار تابع را رسم کنید. ۲) حدود y را بیابید. ۳) نشان دهید تابع متناوب است.

پاسخ:



وقتی این تابع را ساده کنیم به فرم تابع خارقاسکی که دو واحد به سمت بالا در امتداد محور y ها رفته می‌شود.

$$1)\ y=x-[x-2]=x-[x]+2$$

$$2)\ 0\le x-[x]<1 \quad \Rightarrow \quad 2\le x-[x]+2<3 \quad \Rightarrow \quad 2\le y<3$$ حدود تابع

$$3)\ f(x)=x-[x]+2 \quad \Rightarrow \quad T=\frac{1}{|1|}=1$$ دوره تناوب تابع

دوره تناوب اصلی تابع : اگر T دوره تناوب تابع f باشد آن گاه $\forall n\in Z-\{0\}$ ، nT نیز دوره تناوب تابع ا ست یعنی دوره تناوب تابع مجموعه ای بی شمار ا ست ، حال اگر این مجموعه دارای کوچک ترین عضو مثبت باشد آن را دوره ی تناوب اصلی می نامند .

دوره تناوب های مهم :

$$\begin{cases} f(x)=\sin^{2n-1}(ax+b) \\ f(x)=\cos^{2n-1}(ax+b) \end{cases} \quad \Rightarrow \quad T=\frac{2\pi}{|a|}$$

$$\begin{cases} f(x)=\sin^{2n}(ax+b) \\ f(x)=\cos^{2n}(ax+b) \end{cases} \quad \Rightarrow \quad T=\frac{\pi}{|a|}$$

۳۹) دوره تناوب کدام تابع بیشتر است ؟

۱) $y=\sin ۴x$ ۲) $y=\cos \pi x$ ۳) $y=\cos \frac{x}{۲}$ ۴) $y=\sin(۳x+۴)$

گزینه ۳ درست است زیرا

$$\sin ۴x \Rightarrow T=\frac{۲\pi}{۴}=\frac{\pi}{۲}$$

$$\cos \pi x \Rightarrow T=\frac{۲\pi}{\pi}=۲$$

$$\cos\frac{x}{۲} \Rightarrow T=\frac{۲\pi}{\frac{۱}{۲}}=۴\pi$$

$$\sin(۳x+۴) \Rightarrow T=\frac{۲\pi}{۳}$$

نکته

۱) هرگاه تابعی به صورت مجموع یا تفاضل چند تابع مثلثاتی ساده بود برای تعیین دوره تناوب اصلی تابع، ابتدا تناوب هر یک از توابع را حساب کرده سپس کوچک‌ترین مضرب مشترک آن‌ها را به دست می‌آوریم.

۲) هرگاه تابع به صورت حاصل ضرب دو یا چند تابع مثلثاتی ساده باشد. ابتدا آن را به مجموع تبدیل کرده سپس دوره تناوب آن‌ها را تعیین می‌کنیم.

۴۰) دوره تناوب تابع $y=\sin^۲\left(\frac{۳x}{۴}\right)+\cos^۳\left(\frac{۲x}{۳}\right)$ را تعیین کنید.

☑ پاسخ:

$$y=\sin^۲\frac{۳x}{۴} \Rightarrow T_۱=\frac{\pi}{\frac{۳}{۴}}=\frac{۴\pi}{۳} \quad , \quad y=\cos^۳\frac{۲x}{۳} \Rightarrow T_۲=\frac{۲\pi}{\frac{۲}{۳}}=۳\pi \xrightarrow{\text{ک م م}} T=۱۲\pi$$

نکته

اگر مجموع دو کمان برابر $\frac{\pi}{۲}$ باشد آن‌گاه دو کمان متمم و اگر مجموع‌شان π باشد مکمل یکدیگرند.

$$a+b=\frac{\pi}{۲} \Rightarrow \begin{cases} \sin a=\cos b \\ \cos a=\sin b \\ \tan a=\cot b \\ \cot a=\tan b \end{cases} \qquad a+b=\pi \Rightarrow \begin{cases} \sin a-\sin b=0 \\ \cos a+\cos b=0 \\ \tan a+\tan b=0 \\ \cot a+\cot b=0 \end{cases}$$

در صورت وجود

➢ چند مثال:

$\sin ۱۵^\circ=\cos ۷۵^\circ$ $\cot ۵۰^\circ=\tan ۴۰^\circ$ $\sin ۸۰^\circ=\cos ۱۰^\circ$

نسبت های مثلثاتی زوایای دو برابر کمان

۱) $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha \Rightarrow \sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$

۲)
$$\begin{cases} \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = (\cos\alpha - \sin\alpha)(\cos\alpha + \sin\alpha) \\ \cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 \Rightarrow 1 + \cos 2\alpha \Rightarrow 2\cos^2\alpha \Rightarrow 1 + \cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2} \\ \cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha \Rightarrow 1 - \cos 2\alpha = 2\sin^2\alpha \Rightarrow 1 - \cos\alpha = 2\sin^2\frac{\alpha}{2} \end{cases}$$

۳) $(\sin\alpha \pm \cos\alpha)^2 = 1 \pm 2\sin\alpha\cos\alpha = 1 \pm \sin 2\alpha$

۴۱) نشان دهید برای هر زاویه α داریم: $\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}$ (شهریور ۹۴)

☑پاسخ:

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \cos^2\alpha - (1-\cos^2\alpha) = 2\cos^2\alpha - 1 \Rightarrow \cos 2\alpha + 1 = 2\cos^2\alpha \Rightarrow \cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}$$

۴۲) در صورتی که $\sin\alpha = \frac{3}{5}$ و زاویه α حاده باشد مقدار عددی $\cos 2\alpha$ را محاسبه کنید. (خرداد ۹۴ - خارج کشور)

☑پاسخ:

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha \Rightarrow \cos 2\alpha = 1 - 2\left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{7}{25}$$

۴۳) خلاصه شده‌ی عبارت $\tan 20(1+\cos 40)$ را به دست آورید.

☑پاسخ:

$$\tan 20(1+\cos 40) = \frac{\sin 20}{\cos 20}(2\cos^2 20) = 2\sin 20\cos 20 = \sin 40 = \cos 50$$

۴۴) خلاصه شده‌ی عبارت $\sin(\frac{\pi}{2}+a)\sin(\pi+a) - \sin(\pi-a)\cos a$ را بنویسید.

☑پاسخ:
$$\sin(\frac{\pi}{2}+a)\sin(\pi+a) - \sin(\pi-a)\cos a = \cos a(-\sin a) - \sin a\cos a = -2\sin a\cos a = -\sin 2a$$

۴۵) نشان دهید برای هر زاویه‌ی α داریم: $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$ (دی ماه ۹۲)

☑پاسخ:

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$$

۴۶) سینوس زاویه‌ی $22/5^\circ$ را حساب کنید. (خرداد ۹۱)

☑ پاسخ: زاویه $22/5^\circ$ درجه نسبت‌های مثلثاتیش رایج نیست ولی به کمک زاویه 45° می تونیم اونا رو به دست بیاریم

$$1-\cos 2x = 2\sin^2 x \rightarrow \sin x = \sqrt{\frac{1-\cos 2x}{2}} \Rightarrow \sin 22/5 = \sqrt{\frac{1-\cos 45}{2}} = \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}}$$

۴۷) با توجه به این‌که $\sin 75^\circ = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ ، حاصل $\sin 7/5^\circ$ را بیابید.

☑پاسخ: خب یه خورده سفته ولی

$$\cos 15^\circ = \sin 75^\circ = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \Rightarrow \sin^2 7/5^\circ = \frac{1-\cos 15^\circ}{2} = \frac{1-\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}{2} \Rightarrow \sin 7/5^\circ = \sqrt{\frac{4-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{8}}$$

رسم نمودار های مثلثاتی

روش حل مسئله

۱) در توابع : $f(x)=a\sin bx+c$, $f(x)=a\cos bx+c$ مقدار ماکزیمم تابع $|a|+c$ و مقدار مینیمم آن $-|a|+c$ و دوره تناوب $\frac{2\pi}{|b|}$ خواهد بود . و یادت باشه : $c=\frac{y_{max}+y_{min}}{2}$, $|a|=\frac{y_{max}-y_{min}}{2}$

۲) یعنی با داشتن ضابطه ی توابع فوق ماکسیمم و مینیمم و دوره تناوب تابع تعیین می شود وبا داشتن مقادیر ماکسیمم و مینیمم و دوره تناوب می توان ضابطه ی تابع را تعیین کرد .

یادت باشه :

۱) در تابع $y=a\sin x$ خواهیم داشت . $y_{Max}=|a|$, $y_{Min}=-|a|$ که در مبداء مختصات صعودی است اگر $a>0$ باشد و اگر $a<0$ تابع نزولی عبور می کند.

۲) اما تابع $y=a\sin bx$ دارای دوره تناوب $T=\frac{2\pi}{|b|}$ است و $y_{Max}=|a|$, $y_{Min}=-|a|$

۳) در تابع $y=\sin(bx+c)$ همان نمودار $y=\sin bx$ را داریم که به اندازه $\frac{c}{b}$ به سمت چپ یا راست انتقال دارد .

۴۸)ضابطه تابع به فرم $y=a\sin bx+c$ را بنویسید که دوره تناوب آن π ، مقدار ماکزیمم آن ۴ و مقدار مینیمم آن -2 باشد .

$$c=\frac{y_{max}+y_{min}}{2}=\frac{4-2}{2}=2 \qquad |a|=\frac{y_{max}-y_{min}}{2}=\frac{4-(-2)}{2}=3 \qquad T=\pi=\frac{2\pi}{|b|} \Rightarrow |b|=2$$

$$y=3\sin 2x+2$$

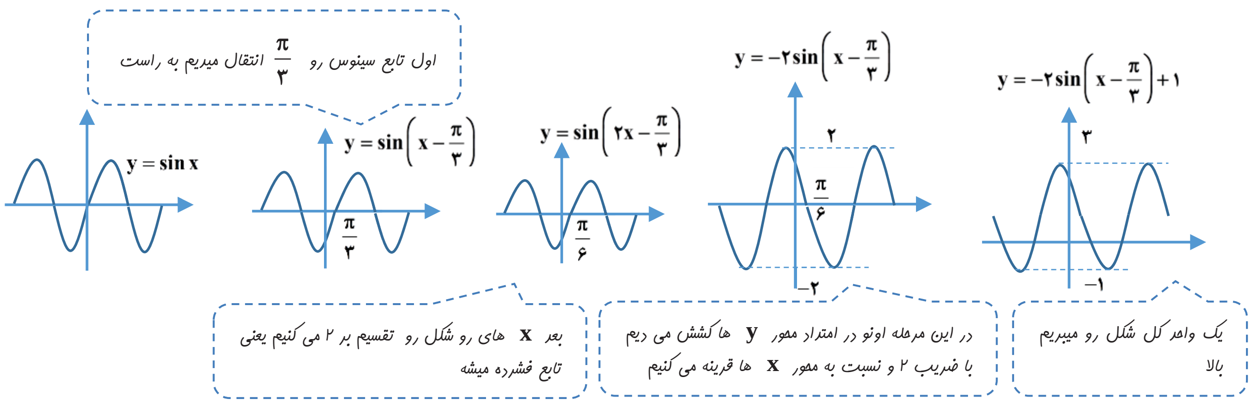
۴۹) ولتاژ یک دستگاه لوازم خانگی بر حسب کسینوس نسبت به زمان دارای فرکانس یا دوره تناوب $\frac{1}{80}$ است و تغییرات ولتاژ در بازه $[-120\,,\,120]$ است معادله ولتاژ این دستگاه را بنویسید .

پاسخ:

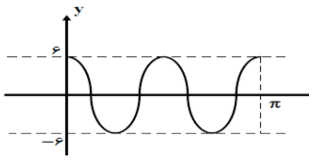
$$v(t)=a\cos(bt)+c$$

$$\frac{2\pi}{b}=\frac{1}{80} \Rightarrow b=160\pi \quad , \quad a=\frac{120-(-120)}{2}=120 \quad , \quad c=\frac{120-120}{2}=0 \Rightarrow v(t)=120\cos 160\pi t$$

۵۰)نمودار تابع $y=-2\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)+1$ را رسم کنید .



۵۱) شکل مقابل نمودار $y=a\cos bx$ است. مقادیر b,a را تعیین کنید و مقدار تابع در $x=\frac{7\pi}{12}$ به دست آورید.



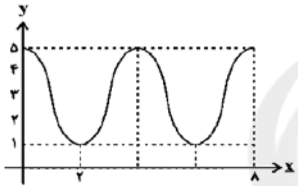
☑پاسخ: در بازه $[0,\pi]$ شکل منحنی دو بار تکرار شده است پس دوره تناوب $T=\frac{\pi}{2}=\frac{2\pi}{|b|}$ است در نتیجه $b=4$

وتغییرات تابع در بازه $[-6,6]$ است و چون روند تابع در مبداء نزولی است پس $a=6$ است و معادله منحنی به صورت $y=6\cos 4x$ خواهد بود .

در نتیجه :

$$f\left(\frac{7\pi}{12}\right)=6\cos\left(4\times\frac{7\pi}{12}\right)=6\cos\frac{7\pi}{3}=6\cos\frac{\pi}{3}=6\left(\frac{1}{2}\right)=3$$

۵۲) نمودار تابع $y=a\cos b\pi x+3$ مطابق شکل روبروست است.حاصل $a+b$ کدام است؟



☑پاسخ: در نقطه‌ی $x=0$ داریم : $f(0)=a\cos b\pi(0)+3=a+3=5 \Rightarrow a=2$

طبق نمودار فاصله‌ی $x=0$ تا $x=2$ ، برابر نصف دوره‌ی تناوب تابع موردنظر است:

$$2-0=\frac{T}{2} \Rightarrow T=4 \Rightarrow \frac{2\pi}{|b\pi|}=4 \Rightarrow b=\pm\frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} a+b=2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2} \\ a+b=2+\frac{1}{2}=\frac{5}{2} \end{cases}$$

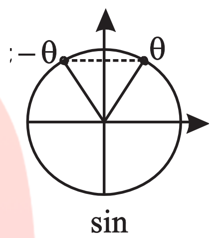
معادلات مثلثاتی

منظور از حل معادله‌ی مثلثاتی یافتن تمام کمان‌هایی است که در معادله صدق می‌کنند، هر معادله‌ی مثلثاتی در صورت داشتن جواب به یکی از معادلات زیر تبدیل می‌شود. به حل و بسط هر یک می‌پردازیم.

۱) $\sin x = m = \sin\theta$ ۲) $\cos x = m = \cos\theta$

معادلات سینوسی

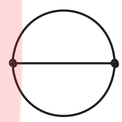
ا)



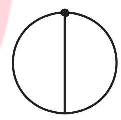
$\sin x = m = \sin\theta$ $(-۱ \le m \le ۱)$

$x = \begin{cases} ۲k\pi + \theta \\ ۲k\pi + \pi - \theta \end{cases}$ جواب‌های عمومی $k \in \mathbb{Z}$

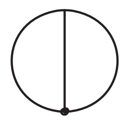
➢ حالت‌های خاص



$\sin x = ۰ \quad \Rightarrow \quad x = k\pi$



$\sin x = ۱ \quad \Rightarrow \quad x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۲}$ ریشه‌های مضاعف



$\sin x = -۱ \quad \Rightarrow \quad x = ۲k\pi - \frac{\pi}{۲}$ ریشه‌های مضاعف

۵۳) معادله ی $\mathrm{Sin}۲x = \mathrm{Sin}x$ را حل کنید.

☑پاسخ:

$$\begin{cases} ۲x = ۲k\pi + x & \Rightarrow \quad x = ۲k\pi \\ ۲x = ۲k\pi + \pi - x & \Rightarrow \quad ۳x = (۲k+۱)\pi \quad \Rightarrow \quad x = \frac{(۲k+۱)\pi}{۳} \end{cases}$$

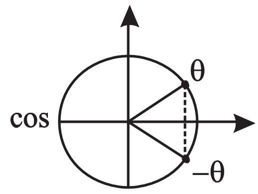
۵۴) معادله $۲\sin^۲ x - \sin x = ۰$ را حل کرده جواب‌هایی که در بازه $[۰, ۲\pi]$ هستند را تعیین کنید. (دی ماه ۹۳)

☑پاسخ:

$$\sin x(۲\sin x - ۱) = ۰$$

$$\begin{cases} \sin x = ۰ & \Rightarrow x = k\pi \\ ۲\sin x - ۱ = ۰ & \Rightarrow \sin x = \frac{۱}{۲} = \sin\frac{\pi}{۶} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۶} \\ x = ۲k\pi + \pi - \frac{\pi}{۶} \end{cases} \end{cases}$$

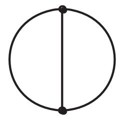
معادلات کسینوسی



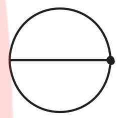
$\cos x = m = \cos\theta \qquad -1 \le m \le 1$

$$x = \begin{cases} 2k\pi - \theta \\ 2k\pi + \theta \end{cases}$$ جواب‌های عمومی

حالت‌های خاص



$\cos x = 0 \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{2}$



$\cos x = 1 \Rightarrow x = 2k\pi$

۵۵) معادله $\cos 3x - \cos x = 0$ را حل کنید .

$$\cos 3x - \cos x = 0 \Rightarrow \cos 3x = \cos x \Rightarrow 3x = 2k\pi \pm x \Rightarrow \begin{cases} x = k\pi \\ x = \frac{k\pi}{2} \end{cases}$$

۵۶) معادله‌ی $\cos 2x - 3\cos x + 2 = 0$ را حل کنید.

☑پاسخ:

۲ شده دو تا ۱

$$1 + \cos 2x - 3\cos x + 1 = 0 \Rightarrow 2\cos^2 x - 3\cos x + 1 = 0 \Rightarrow \cos x = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{4} = \begin{cases} \cos x = 1 \\ \cos x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\cos x = 1 = \cos 2k\pi \Rightarrow x = 2k\pi \quad , \quad \cos x = \frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$$

۵۷) معادله $\sin 2x - \sqrt{3}\cos x = 0$ را حل کنید. (شهریور ۹۳)

☑پاسخ:

$$2\sin x\cos x - \sqrt{3}\cos x = 0 \Rightarrow \cos x(2\sin x - \sqrt{3}) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ 2\sin x - \sqrt{3} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos x = 0 & \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2} \\ \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin\frac{\pi}{3} & \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{3} \\ x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{3} \end{cases} \end{cases}$$

۵۸) معادله $\sin^2 x = \cos^2 x + 1$ را حل کنید. (شهریور ۹۴)

☑پاسخ:

$$1 - \cos^2 x = \cos^2 x + 1 \Rightarrow 2\cos^2 x = 0 \Rightarrow \cos x = 0 \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2}$$

فصل ۳ حد

بخش پذیری

فرض کنید $p(x)$, $g(x)$ *دو چند جمله ای با شند در این صورت چند جمله ای های منحصر به فرد* $r(x), q(x)$ *وجود دارند به طوری که* $p(x)=g(x)q(x)+r(x)$
$p(x)$ *را مقسوم و* $g(x)$ *را مقسوم علیه و* $q(x)$ *را خارج قسمت و* $r(x)$ *را باقی مانده می نامند .*

اگر $p(x)$ *از درجه* n *و مقسوم علیه* $g(x)$ *از مرتبه* m *باشد آنگاه خارج قسمت* $q(x)$ *از درجه* $(n-m)$ *و باقی مانده* $r(x)$ *حداکثر از درجه ی* $(m-1)$ *ا ست .*

مثال

$p(x)$ مقسوم : درجه ۴

$g(x)$ مقسوم علیه : مرتبه ۱

$$\begin{array}{l|l} x^4-2x+1 & x-1 \\ \cline{2-2} -(x^4-x^3) & x^3+x^2+x-1 \\ \hline x^3-2x+1 & \\ -(x^3-x^2) & \\ \hline x^2-2x+1 & \\ -(x^2-x) & \\ \hline -x+1 & \\ -(-x+1) & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$q(x)$ خارج قسمت : مرتبه ۳

$r(x)$ باقیمانده صفر شده یعنی بخش پذیراست

نکته

۱) اگر $p(x)$ یک چند جمله ای آنگاه باقی مانده تقسیم ، $p(x)$ بر $g(x)=x-a$ برابر ا ست با : $p(a)$

۲) برای پیدا کردن باقیمانده تقسیم $p(x)$ بر $(ax+b)$ ابتدا مقسوم علیه را مساوی صفر قرار می دهیم و ریشه آن را بدست آورده و در مقسوم به جای x قرار می دهیم آنگاه داریم : $r=p\left(\frac{-b}{a}\right)$ بدیهی ا ست که اگر $r=0$ باشد ، $p(x)$ بر $(ax+b)$ بخش پذیر ا ست

۵۹) مقدار k را چنان بیابید که چند جمله ای $p(x)=2x^3-kx^2-x+3$ بر $x+1$ بخش پذیر باشد .

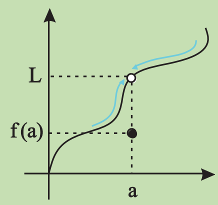
✍) $x+1=0 \Rightarrow x=-1 \Rightarrow p(-1)=0 \Rightarrow 2(-1)^3-k(-1)^2-(-1)+3=0 \Rightarrow k=2$

۶۰) مقدار k را طوری تعیین کنید که عبارت $8x^3+4x^2-kx-8$ بر $2x-1$ بخش پذیر با شد ؟

✍) $2x-1=0 \Rightarrow x=\frac{1}{2} \Rightarrow p\left(\frac{1}{2}\right)=8\left(\frac{1}{2}\right)^3+4\left(\frac{1}{2}\right)^2-k\left(\frac{1}{2}\right)-8=0 \Rightarrow k=-12$

مفهوم حد

فرض کنید تابع $f(x)$ در یک همسایگی متقارن محذوف نقطه‌ی $x=a$ تعریف شده باشد، آن‌گاه می‌گوئیم تابع $f(x)$ در نقطه $x=a$ حد دارد و مقدار آن L است هر وقت با میل کردن x به سمت a مقادیر $f(x)$ هم به سمت عدد معین L میل کند. در واقع حد یعنی رفتار تابع در مجاورت نقطه a و اصلاً ربطی به مقدار تابع در نقطه a ندارد.



– **حد راست:** *اگر x از طرف راست به سمت a میل کند و تابع $f(x)$ به عددی مانند $L_۱$ نزدیک شود، می‌گوئیم تابع f در نقطه‌ی a حد راست دارد و به صورت روبه‌رو نشان می‌دهیم:*

$$\lim_{x\to a^+} f(x)=L_۱$$

– **حد چپ:** *اگر x از طرف چپ به سمت a میل کند و تابع $f(x)$ به عددی مانند $L_۲$ نزدیک شود، می‌گوئیم تابع f در نقطه‌ی a حد چپ دارد و به صورت روبه‌رو نشان می‌دهیم:*

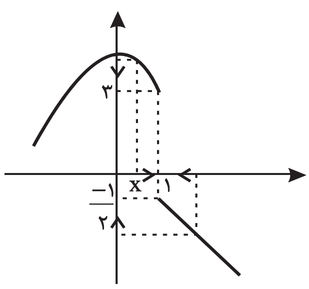
$$\lim_{x\to a^-} f(x)=L_۲$$

بررسی حد تابع از روی نمودار:

برای تعیین حد تابع از روی نمودار به شکل زیر عمل می‌کنیم:

ابتدا چند نقطه روی محور x ها در سمت راست نقطه a انتخاب می‌کنیم از این نقاط از راست به چپ خطوطی عمود بر محور xها خارج می‌کنیم و محل تقاطع آن‌ها را با نمودار تابع به دست آورده و از نقاط تقاطع به محور y ها عمود می‌کنیم. با این کار رفتار y تابع هنگامی که xها به a از سمت راست نزدیک می‌شوند را مشاهده می‌کنیم. همین کار را از سمت چپ نقطه a انجام می‌دهیم اگر شاخه‌هایی سمت چپ و راست نمودار f در x=a به عرض L روی محور y ها برسند آن‌گاه تابع در نقطه a حد دارد.

۶۱) نمودار تابع $f(x)=\begin{cases}\frac{-۱}{۲}x & x\geq ۱\\ ۴-x^۲ & x<۱\end{cases}$ را رسم کنید و به کمک آن وجود حد تابع را در $x=۱$ بررسی کنید.



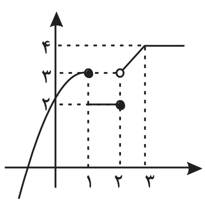
☑پاسخ:

$$\lim_{x\to ۱^+}\frac{-۱}{۲}x=\frac{-۱}{۲}$$

تابع در این نقطه حد ندارد زیرا:

$$\lim_{x\to ۱^-} ۴-x^۲=۴-۱=۳$$

۶۲) نمودار $f(x)$ شکل مقابل است. حاصل عبارت $۳\lim_{x\to ۲^+} f(x)-\lim_{x\to ۱^-} f(x)+۲f(۳)$ را به دست آورید.

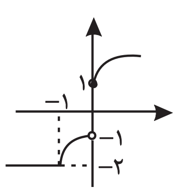


☑پاسخ:

$\lim_{x\to ۲^+} f(x)=۳$ $\lim_{x\to ۱^-} f(x)=۳$ $f(۳)=۴$

$$۳\lim_{x\to ۲^+} f(x)-\lim_{x\to ۱^-} f(x)+۲f(۳)=۳(۳)-(۳)+۲(۴)=۱۴$$

۶۳) با توجه به نمودار تابع f حاصل حدهای زیر را به دست آورید.



☑پاسخ:

$\lim_{x\to -۱} f(x)=-۲$ $\lim_{x\to ۰^-} f(x)=-۱$

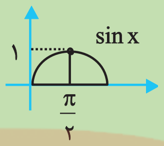
$\lim_{x\to ۰^-}[f(x)]=[-۱^-]=-۲$ $\lim_{x\to ۰^+} f(x)=۱$

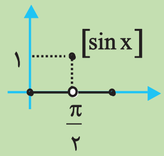
صفر مطلق

اساساً صفرمطلق یعنی تابع ای در تمامی یک بازه همواره صفر باشد یعنی به ازای x های یک بازه $f(x)=0$ می‌شود. مثلاً صفری که به وسیله براکت ساخته شود صفر مطلق است.

$$\begin{cases} 1^- \cong \quad 0 \le x < 1 \Rightarrow \left[1^-\right]=0 \ \text{صفر مطلق} \\ 0^+ \cong \quad 0 \le x < 1 \Rightarrow \left[0^+\right]=0 \ \text{صفر مطلق} \end{cases}$$

$$\forall x \in [0,\frac{\pi}{2}) \rightarrow [\sin x]=0$$





$$\lim_{x\to 0^+}[\sin x]=[\sin 0^+]=[0^+]=0$$

تو یه بازه این تابع صفره. بنابراین صفرش مطلقه .

حدود توابع کسری

برای محاسبه حد توابع کسری به نکات زیر توجه داریم:

اگر صورت و مخرج کسر صفر نشه که خیلی راحته. مقدار گذاری می‌کنیم. خلاص

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}=\frac{L_1}{L_2}$$

اما اگه فقط مخرج صفر حدی بشه و صورت عدد ناصفر، جواب حد بی نهایت میشه.

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{L\neq 0}{\underset{\text{صفر حدی}}{0}}=\infty$$

اگه صورت و مخرج هر دو صفر بشن حالت‌های زیر رخ میده:

$$\lim_{x\to a}=\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\text{صفر حدی}}{\text{صفر مطلق}}=\text{وجود ندارد}$$

$$\lim_{x\to a}=\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\text{صفر مطلق}}{\text{صفر حدی}}=0$$

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{0 \ \text{صفر حدی}}{0 \ \text{صفر حدی}}=\text{ابهام}$$

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{0 \ \text{صفر مطلق}}{0 \ \text{صفر مطلق}}=\text{وجود ندارد}$$

اگر حد ابهام $\frac{0}{0}$ داشت، باید آن را رفع ابهام کنیم که روش‌های رفع ابهام را خواهیم گفت .

۶۴) حاصل حدود $1)\ \lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+3}}{2-\sqrt{x}}$ و $2)\ \lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2+1}{x^2-4x+4}$ را به دست آورید.

☑پاسخ:

$$1)\ \lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+3}}{2-\sqrt{x}}=\frac{4}{2-\sqrt{1}}=\frac{2}{1}=2$$

$$2)\ \lim_{x\to 2}\frac{x^2+1}{x^2-4x+4}=\lim_{x\to 2}\frac{x^2+1}{(x-2)^2}=\frac{5}{(0^{\pm})^2}=\frac{5}{0^+}=+\infty$$

هر چند حد چپ و راست هر دو برابر $+\infty$ شده‌اند ولی به خاطر آن که عدد نیستند، تابع در این نقطه حد ندارد.

۶۵) حاصل حدود روبه‌رو را محاسبه کنید:

$$1)\ \lim_{x\to 0^+}\frac{[x]}{x} \qquad 2)\ \lim_{x\to 1^+}\frac{x-1}{[x]-1}$$

☑پاسخ:

$$1)\ \lim_{x\to 0^+}\frac{[x]}{x}=\frac{0 \ \text{مطلق}}{0 \ \text{حدی}}=0$$

$$2)\ \lim_{x\to 1^+}\frac{x-1}{[x]-1}=\frac{x-1}{[1^+]-1}=\frac{0 \ \text{حدی}}{0 \ \text{مطلق}} \ \boxed{\text{وجود ندارد}}$$

رفع ابهام $\frac{0}{0}$

روش حل مسئله

سوالات ابهام‌دار

۱) در ابتدای کار ابهام $\frac{0}{0}$ را بیان کنید و بنویسید.

۲) عامل ابهام در $x=a$ ، $(x-a)$ می‌باشد. که باید آن را از صورت و مخرج فاکتور بگیریم و ساده کنیم. (به این کار می‌گن رفع ابهام)

۳) پس از ساده کردن ، مقدار $x=a$ را جایگذاری کنید و حد را به دست آورید.

۴) در هر مرحله lim یادت نره.

هرگاه $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{0}{0}$ بشه اصطلاحاً می‌گویند حد ابهام صفر صفرم داره، معنیش این که عامل $(x-a)$ یعنی عامل صفر کننده هم در صورت و هم در مخرج وجود داره و باعث ابهام $\frac{0}{0}$ می شه. برای رفع ابهام یکی از روش‌های زیر را استفاده می‌کنیم.

از عامل $(x-a)$ هم در صورت و هم در مخرج فاکتور می‌گیریم و پس از ساده نمودن مقدارگذاری می‌کنیم. (در توابع چند جمله‌ای خطی بیشتر کاربرد داره)

۶۶) حدود زیر را محاسبه کنید.

۱) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2+x-6}{x-2}$ ۲) $\lim\limits_{t\to -1}\frac{t+1}{t^3+1}$ ۳) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-x}{x^2+x-2}$

☑پاسخ:

وقتی $x\to 2$ عامل صفر $(x-2)$ میشه. در صورت و مخرج از اون فاکتور گرفتیم.

۱) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2+x-6}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+3)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}(x+3)=5$

اتحاد چاق و لاغر

۲) $\lim\limits_{t\to -1}\frac{t+1}{t^3+1}=\lim\limits_{x\to -1}\frac{(t+1)}{(t+1)(t^2-t+1)}=\lim\limits_{x\to -1}\frac{1}{(t^2-t+1)}=\frac{1}{3}$

۳) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-x}{x^2+x-2}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{x\cancel{(x-1)}}{(x+2)\cancel{(x-1)}}=\frac{1}{3}$

۶۷) حد توابع زیر را محاسبه کنید. (خرداد و شهریور ۹۰)

۱) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^3-8}{3x^2-12}$ ۲) $\lim\limits_{x\to 3}\left(\frac{2}{x-3}-\frac{12}{x^2-9}\right)$

☑پاسخ:

۱) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^3-8}{3x^2-12}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{3(x-2)(x+2)}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2+2x+4}{3(x+2)}=\frac{12}{12}=1$

۲) $\lim\limits_{x\to 3}\left(\frac{2}{x-3}-\frac{12}{x^2-9}\right)=\lim\limits_{x\to 3}\left(\frac{2}{x-3}-\frac{12}{(x-3)(x+3)}\right)=\lim\limits_{x\to 3}\frac{2x-6}{(x-3)(x+3)}=\lim\limits_{x\to 3}\frac{2\cancel{(x-3)}}{\cancel{(x-3)}(x+3)}=\lim\limits_{x\to 3}\frac{2}{(x+3)}=\frac{1}{3}$

نکته

نکته : اگر تجزیه صورت و مخرج برای یافتن عامل ابهام مشکل باشد می توانیم با تقسیم هر کدام بر $(x-a)$ آن را تجزیه کنیم.

۶۸) حدود توابع زیر را تعیین کنید.

$$1)\ \lim_{x\to -1}\frac{x^3-2x-1}{x^2-1}\qquad 2)\ \lim_{x\to 2}\frac{x^3-x^2-x-2}{x^4-2x^3-x^2+2x}\qquad 3)\ \lim_{x\to 1}\frac{x^4-2x+1}{2x^2-3x+1}$$

☑پاسخ:

$$1)\ \lim_{x\to -1}\frac{x^3-2x-1}{x^2-1}=\lim_{x\to -1}\frac{\cancel{(x+1)}(x^2-x-1)}{\cancel{(x+1)}(x-1)}=\lim_{x\to -1}\frac{x^2-x-1}{x-1}=\frac{1}{-2}$$

$$2)\ \lim_{x\to 2}\frac{x^3-x^2-x-2}{x^4-2x^3-x^2+2x}=\lim_{x\to 2}\frac{\cancel{(x-2)}(x^2+x+1)}{\cancel{(x-2)}(x^3-x)}=\frac{4+2+1}{8-2}=\frac{7}{6}$$

$$3)\ \lim_{x\to 1}\frac{x^4-2x+1}{2x^2-3x+1}=\lim_{x\to 1}\frac{\cancel{(x-1)}(x^3+x^2+x-1)}{\cancel{(x-1)}(2x-1)}=\frac{2}{1}=2$$

$$\begin{array}{l|l}
x^4-2x+1 & x-1 \\ \hline
-(x^4-x^3) & x^3+x^2+x-1 \\
x^3-2x+1 & \\
-(x^3-x^2) & \\
x^2-2x+1 & \\
-(x^2-x) & \\
-x+1 & \\
-(-x+1) & \\
0 &
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{l|l}
2x^2-3x+1 & x-1 \\ \hline
-(2x^2-2x) & 2x-1 \\
-x+1 & \\
-(-x+1) & \\
0 &
\end{array}$$

روش حل مسئله

۲) هرگاه صورت یا مخرج عامل ابهام رادیکالی داشته باشد (مثلا: $\left(\sqrt{x}-\sqrt{a}\right)$) صورت و مخرج را در مزدوج عامل رادیکالی ضرب می کنیم پس از گویا و ساده کردن رفع ابهام نموده، حد را به دست می‌آوریم.

مزدوج‌های مهم:

$$(x-a)(x+a)=x^2-a^2 \qquad \left(\sqrt{x}-\sqrt{a}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{a}\right)=x-a$$

$$(x\pm a)\left(x^2\mp ax+a^2\right)=x^3\pm a^3 \qquad \left(\sqrt[3]{x}\pm\sqrt[3]{a}\right)\left(\sqrt[3]{x^2}\mp\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{a^2}\right)=x\pm a$$

۶۹) حد زیر را محاسبه کنید. (خرداد ۹۳)

۱) $\lim\limits_{x\to ۴}\dfrac{\sqrt{x}-۲}{x^۲-۱۶}$ ۲) $\lim\limits_{x\to ۱}\dfrac{\sqrt{x}-۱}{۲x-۲}$

☑پاسخ:

۱) $\lim\limits_{x\to ۴}\dfrac{\sqrt{x}-۲}{x^۲-۱۶}=\dfrac{۰}{۰}\Rightarrow \lim\limits_{x\to ۴}\dfrac{\sqrt{x}-۲}{x^۲-۱۶}\times\dfrac{\sqrt{x}+۲}{\sqrt{x}+۲}=\lim\limits_{x\to ۴}\dfrac{\cancel{(x-۴)}}{\cancel{(x-۴)}(x+۴)(\sqrt{x}+۲)}=\lim\limits_{x\to ۴}\dfrac{۱}{(x+۴)(\sqrt{x}+۲)}=\dfrac{۱}{۳۲}$

۲) $\lim\limits_{x\to ۱}\dfrac{\sqrt{x}-۱}{۲x-۲}=\dfrac{۰}{۰}\Rightarrow \lim\limits_{x\to ۱}\dfrac{\sqrt{x}-۱}{۲(x-۱)}\times\dfrac{\sqrt{x}+۱}{\sqrt{x}+۱}=\lim\limits_{x\to ۱}\dfrac{\cancel{(x-۱)}}{۲\cancel{(x-۱)}(\sqrt{x}+۱)}=\lim\limits_{x\to ۱}\dfrac{۱}{۲(\sqrt{x}+۱)}=\dfrac{۱}{۴}$

۷۰) حدود روبه رو را محاسبه کنید.

۱) $\lim\limits_{x\to ۲}\dfrac{x-۲}{\sqrt{۲x}-۲}$ ۲) $\lim\limits_{x\to ۸}\dfrac{x^۲-۶۴}{\sqrt[۳]{x}-۲}$ ۳) $\lim\limits_{x\to ۳}\dfrac{\sqrt{۳x+۷}-۴}{۹-x^۲}$

☑پاسخ:

۱) $\lim\limits_{x\to ۲}\dfrac{x-۲}{\sqrt{۲x}-۲}\times\dfrac{\sqrt{۲x}+۲}{\sqrt{۲x}+۲}=\lim\limits_{x\to ۲}\dfrac{(x-۲)\left(\sqrt{۲x}+۲\right)}{۲x-۴}=\lim\limits_{x\to ۲}\dfrac{\cancel{(x-۲)}\left(\sqrt{۲x}+۲\right)}{۲\cancel{(x-۲)}}=\lim\limits_{x\to ۲}\dfrac{\sqrt{۲x}+۲}{۲}=۲$

۲) $\lim\limits_{x\to ۸}\dfrac{x^۲-۶۴}{\sqrt[۳]{x}-۲}=\lim\limits_{x\to ۸}\dfrac{(x-۸)(x+۸)}{\left(\sqrt[۳]{x}-۲\right)}\times\dfrac{\sqrt[۳]{x^۲}+۲\sqrt[۳]{x}+۴}{\sqrt[۳]{x^۲}+۲\sqrt[۳]{x}+۴}=\lim\limits_{x\to ۸}\dfrac{\cancel{(x-۸)}(x+۸)\left(\sqrt[۳]{x^۲}+۲\sqrt[۳]{x}+۴\right)}{\cancel{(x-۸)}}=۱۹۲$

۳) $\lim\limits_{x\to ۳}\dfrac{\sqrt{۳x+۷}-۴}{۹-x^۲}=\dfrac{۰}{۰}=\lim\limits_{x\to ۳}\dfrac{\sqrt{۳x+۷}-۴}{(۳-x)(۳+x)}\times\dfrac{\sqrt{۳x+۷}+۴}{\sqrt{۳x+۷}+۴}=\lim\limits_{x\to ۳}\dfrac{۳x-۹}{(۳-x)(۳+x)(۸)}=\lim\limits_{x\to ۳}\dfrac{۳\cancel{(x-۳)}}{-\cancel{(x-۳)}(x+۳)(۸)}=\dfrac{-۱}{۱۶}$

۷۱) حدود توابع زیر را محاسبه کنید. (خرداد وشهریور ۹۴- خارج کشور)

۱) $\lim\limits_{x\to ۴}\dfrac{x-۴}{\sqrt{x}-۲}$ ۲) $\lim\limits_{x\to ۱}\dfrac{x-۱}{\sqrt{x}-۱}$

☑پاسخ:

۱) $\lim\limits_{x\to ۴}\dfrac{x-۴}{\sqrt{x}-۲}=\dfrac{۰}{۰}\Rightarrow \lim\limits_{x\to ۴}\dfrac{x-۴}{\sqrt{x}-۲}\times\dfrac{\sqrt{x}+۲}{\sqrt{x}+۲}=\lim\limits_{x\to ۴}\dfrac{\cancel{(x-۴)}(\sqrt{x}+۲)}{\cancel{(x-۴)}}=\sqrt{۴}+۲=۴$

۲) $\lim\limits_{x\to ۱}\dfrac{x-۱}{\sqrt{x}-۱}=\dfrac{۰}{۰}\Rightarrow \lim\limits_{x\to ۱}\dfrac{x-۱}{\sqrt{x}-۱}\times\dfrac{\sqrt{x}+۱}{\sqrt{x}+۱}=\lim\limits_{x\to ۱}\dfrac{\cancel{(x-۱)}(\sqrt{x}+۱)}{\cancel{(x-۱)}}=\lim\limits_{x\to ۱}\sqrt{x}+۱=۲$

۷۲)حد تابع زیر را تعیین کنید.

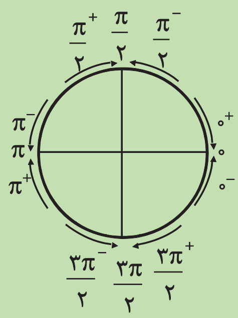
$\lim\limits_{x\to ۱}\dfrac{x^۲-۱}{۱-\sqrt{x}}$

☑پاسخ:

$\lim\limits_{x\to ۱}\dfrac{x^۲-۱}{۱-\sqrt{x}}=\dfrac{۰}{۰}=\lim\limits_{x\to ۱}\dfrac{(x-۱)(x+۱)}{۱-\sqrt{x}}\times\dfrac{۱+\sqrt{x}}{۱+\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to ۱}\dfrac{\cancel{(x-۱)}(x+۱)\left(۱+\sqrt{x}\right)}{۱-x=-\cancel{(x-۱)}}=-۴$

حدود توابع مثلثاتی در نقاط مرزی

در محاسبه حدهای یک طرفه در توابع مثلثاتی دونستن این که زاویه در کدوم ناحیه مثلثاتیه خیلی مهمه. مثلا وقتی $x \to ۰^-$ یعنی x در ربع چهارمه و به صفر نزدیک میشه، یا وقتی $x \to ۰^+$ یعنی x در ربع اوله و به صفر نزدیک میشه. این مطالب را در شکل زیر بررسی می‌کنیم.



تعریف نشده $\tan\frac{\pi}{۲}$ ناحیه دوم $\tan\frac{\pi}{۲}^+ = -\infty$ ناحیه اول $\tan\frac{\pi}{۲}^- = +\infty$

تعریف نشده $\tan\frac{۳\pi}{۲}$ ناحیه چهارم $\tan\frac{۳\pi}{۲}^+ = -\infty$ ناحیه سوم $\tan\frac{۳\pi}{۲}^- = +\infty$

۷۳) حاصل حدود زیر را بیابید.

$$۱)\ \lim_{x\to\frac{۵\pi}{۲}^+}\tan x \qquad ۲)\ \lim_{x\to\frac{-\pi}{۳}^+}\frac{\cos(x+\frac{\pi}{۳})}{\sin(x+\frac{\pi}{۳})} \qquad ۳)\ \lim_{x\to\frac{\pi}{۲}^+}\frac{۱}{\cos x} \qquad ۴)\ \lim_{x\to\pi^+}\frac{۱}{\sin x} \qquad ۵)\ \lim_{x\to\frac{\pi}{۲}}\frac{۱+\cos x}{۱-\sin x}$$

☑پاسخ:

$$۱)\ \lim_{x\to\frac{۵\pi}{۲}^+}\tan x = \lim_{x\to\frac{۵\pi}{۲}^+}\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{۱}{۰^-} = -\infty$$

$$۲)\ \lim_{x\to\frac{-\pi}{۳}^+}\frac{\cos(x+\frac{\pi}{۳})}{\sin(x+\frac{\pi}{۳})} = \frac{۱}{۰^+} = +\infty$$

$$۳)\ \lim_{x\to\frac{\pi}{۲}^+}\frac{۱}{\cos x} = \frac{۱}{۰^-} = -\infty$$

$$۴)\ \lim_{x\to\pi^+}\frac{۱}{\sin x} = \lim_{x\to\pi^+}\frac{۱}{\sin\pi^+} = \frac{۱}{۰^-} = -\infty$$

$$۵)\ \lim_{x\to\frac{\pi}{۲}}\frac{۱+\cos x}{۱-\sin x} = \frac{۱+۰}{۱-۱^-} = \frac{۱}{۰^+} = +\infty$$

روش حل مسئله

در حالت ابهام $\frac{۰}{۰}$ اگر عامل ابهام در صورت یا مخرج داخل قدر مطلق باشد، باید تکلیف قدر مطلق را با تعیین علامت مشخص کنیم و حد چپ و راست را جداگانه بررسی کنیم.

۷۴) حدود زیر را محاسبه کنید.

$$1)\ \lim_{x\to 3^+}\frac{|9-x^2|}{x-3}\qquad 2)\ \lim_{x\to 3^-}\frac{x^2-7}{|3-x|}\qquad 3)\ \lim_{x\to 1}\frac{|x^2-1|}{x-1}$$

☑پاسخ:

$$1)\ \lim_{x\to 3^+}\frac{|9-x^2|}{x-3}=\lim_{x\to 3^+}\frac{-(3-x)(3+x)}{x-3}=\lim_{x\to 3^+}\frac{\cancel{(x-3)}(x+3)}{\cancel{(x-3)}}=\lim_{x\to 3^+}(3+x)=6$$

$$2)\ \lim_{x\to 3^-}\frac{x^2-7}{|3-x|}=\lim_{x\to 3^-}\frac{x^2-7}{3-x}=\frac{2}{0^+}=+\infty$$

$$3)\ \lim_{x\to 1}\frac{|x^2-1|}{x-1}=\frac{0}{0}\Rightarrow\begin{cases}\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{(x-1)(x+1)}{x-1}=2\\[2ex]\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{-(x-1)(x+1)}{x-1}=-2\end{cases}$$

۷۵) حاصل حدود زیر را به دست آورید.

$$1)\ \lim_{x\to 3^-}\frac{|x-3|+|x^2-9|}{|x-3|}\qquad 2)\ \lim_{x\to 2^-}\frac{x^2-4}{|x^2-5x+6|}$$

☑پاسخ:

$$1)\ \lim_{x\to 3^-}\frac{|x-3|+|x^2-9|}{|x-3|}=\lim_{x\to 3^-}\frac{|x-3|+|x-3||x+3|}{|x-3|}=\lim_{x\to 3^-}\frac{\cancel{|x-3|}(1+|x+3|)}{\cancel{|x-3|}}=\lim_{x\to 3^-}(1+|x+3|)=1+|3+3|=7$$

$$2)\ \lim_{x\to 2^-}\frac{x^2-4}{|x^2-5x+6|}=\lim_{x\to 2^-}\frac{(x-2)(x+2)}{|(x-2)(x-3)|}=\lim_{x\to 2^-}\frac{\cancel{(x-2)}(x+2)}{\cancel{(x-2)}(x-3)}=\frac{4}{-1}=-4$$

روش حل مسئله

برای محاسبه‌ی حدودی که شامل عبارت براکتی است، اول تکلیف قسمت براکتی را تعیین می‌کنیم و به جای آن عدد صحیح مناسب را قرار می‌دهیم، سپس به ادامه حد می‌پردازیم.

۷۶) حدود توابع زیر را محاسبه کنید.

$$1)\ \lim_{x\to 3^+}\frac{[x]-3}{x-3}\qquad 2)\ \lim_{x\to 1^+}\frac{x^3-[x^3]}{x-[x]}$$

☑پاسخ:

$$1)\ x\to 3^+\Rightarrow 3\le x<4\Rightarrow [x]=3\Rightarrow [3^+]=3\Rightarrow \lim_{x\to 3^+}\frac{[x]-3}{x-3}=\lim_{x\to 3^+}\frac{[3^+]-3}{x-3}=\frac{0_{\text{مطلق}}}{0_{\text{حدی}}}=0$$

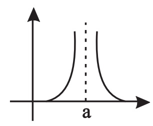
$$\boxed{[(1^+)^3]=1}$$

$$2)\ \lim_{x\to 1^+}\frac{x^3-[x^3]}{x-[x]}=\lim_{x\to 1^+}\frac{x^3-1}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{\cancel{(x-1)}(x^2+x+1)}{\cancel{(x-1)}}=3$$

$$\boxed{[(1^+)]=1}$$

حدود نامتناهی :

اگر تابع f در همسایگی محذوف نقطه $x=a$ تعریف شده باشد و $\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$ شود ،معنایش این است که مقادیر y تابع یعنی عرض آن از هر عدد مثبت بسیار بزرگی ، بزرگتر است به شرط آن که x به اندازه کافی به a نزدیک شود (در مجاورت $x=a$ عرض تابع بیکران یا همان بی نهایت می شود)



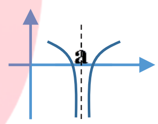
$$\begin{cases} x\to a & \text{عدد} \\ y\to +\infty \end{cases}$$

۷۷) حاصل $\lim\limits_{x\to ۲}\dfrac{x^۲+۱}{x^۲-۴x+۴}$ را به دست آورید .

✍)
$$\lim_{x\to ۲}\frac{x^۲+۱}{x^۲-۴x+۴}=\lim_{x\to ۲}\frac{x^۲+۱}{(x-۲)^۲}=\frac{۵}{(۰^\pm)^۲}=\frac{۵}{۰^+}=+\infty$$

هر چند ، حد چپ و راست هر دو برابر $+\infty$ شده اند ولی به خاطر آن که عدد نیستند ، تابع در این نقطه حد ندارد .

اگر تابع f در همسایگی محذوف نقطه $x=a$ تعریف شده باشد و $\lim\limits_{x\to a} f(x)=-\infty$ شود ،معنایش این است که مقادیر y تابع یعنی عرض آن از هر عدد منفی کوچکتر است به شرط آن که x به اندازه کافی به a نزدیک شود .



$$\begin{cases} x\to a & \text{عدد} \\ y\to -\infty \end{cases}$$

مثلاً
$$\lim_{x\to -۳}\frac{x-۴}{x^۲+۶x+۹}=\lim_{x\to -۳}\frac{x-۴}{(x+۳)^۲}=\frac{-۷}{(۰^\pm)^۲}=\frac{-۷}{۰^+}=-\infty$$

بعضی وقت ها حاصل حد در یک نقطه ۲ تا بی نهایت با علامت های متفاوت میشه

مثلاً)
$$\lim_{x\to ۲}\frac{۲x+۱}{x-۲}=\begin{cases}\lim\limits_{x\to ۲^+}\dfrac{۲x+۱}{x-۲}=\dfrac{۵}{۰^+}=+\infty \\ \lim\limits_{x\to ۲^-}\dfrac{۲x+۱}{x-۲}=\dfrac{۵}{۰^-}=-\infty\end{cases}$$

در توابع کسری ریشه هایی از مخرج کسر ، به شرط آن که در این نقاط بتوان حد گرفت و حد ∞ شود . (*یعنی باید در همسایگی چپ یا راست ریشه مخرج تابع تعریف شده باشد*) حدود بی نهایتی ایجاد می کنند .

۷۸) حاصل حدود زیر را محاسبه کنید:

۱) $\lim\limits_{x\to ۰^+}\dfrac{[x]}{x}$ ۲) $\lim\limits_{x\to ۳}\dfrac{۱}{[x]-۳}$ ۳) $\lim\limits_{x\to -۱}\sqrt{\dfrac{۱-x}{۱+x}}$

☑ پاسخ:

۱) $\lim\limits_{x\to ۰}\dfrac{۳}{x^۲}=\dfrac{۳}{۰^+}=+\infty$

$$۲)\ D_f = R - \{x \mid [x] - ۳ = ۰\} = R - [۳,۴)$$

می‌دانیم:

$$\lim_{x\to ۳^+} f(x)$$ این حد وجود ندارد، چون در همسایگی راست این نقطه تابع تعریف نشده

$$\lim_{x\to ۳^-} f(x) = \lim_{x\to ۳^-} \frac{۱}{[۳^-] - ۳} = \frac{۱}{۲-۳} = -۱$$

$$۳)\ \lim_{x\to -۱} \sqrt{\frac{۱-x}{۱+x}} = \begin{cases} \lim_{x\to -۱^+} \sqrt{\frac{۱-x}{۱+x}} = \sqrt{\frac{۲}{۰^+}} = +\infty \\ \lim_{x\to -۱^-} \sqrt{\frac{۱-x}{۱+x}} = \sqrt{\frac{۲}{۰^-}} = \end{cases}$$

با توجه به دامنه اساساً این حد وجود ندارد چون در سمت چپ نقطه $x=-۱$ تابع تعریف نشده .

x		-۱	۱	
$\frac{۱-x}{۱+x}$	$-$	۰	$+$	$-$

۷۹) حدود زیر را محاسبه کنید .

$$\lim_{x\to ۰} \frac{۱}{|x|} + \frac{x^۲+۱}{\sin^۲ x} = \frac{۱}{|۰^\pm|} + \frac{(۰^\pm)^۲+۱}{(۰^\pm)^۲} = \frac{۱}{۰^+} + \frac{۱}{۰^+} = (+\infty) + (+\infty) = +\infty$$

$$\lim_{x\to ۰^+} \frac{۱}{x^۲ - ۳x} = \lim_{x\to ۰^+} \frac{۱}{x(x-۳)} = \frac{۱}{۰^+(۰^+ - ۳)} = \frac{۱}{۰^-} = -\infty$$

$$\lim_{x\to \frac{۱}{۲}} \frac{[x]-۳}{|۲x-۱|} = \lim_{x\to \frac{۱}{۲}} \frac{۰-۳}{|۰^\pm|} = \frac{-۳}{۰^+} = -\infty$$

حد در بینهایت : اگه متغییر ما بره به سمت بینهایت یعنی $x\to\infty$ و عرض تابع یعنی y آن به یک عدد نزدیک شود می گوییم تابع ما در بینهایت حد دارد و می نویسیم : $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$

به عبارت دیگر

$x \to \infty$
$y \to$ عدد بشه

روش حل مسئله

در کتاب درسی تاکید به محاسبه حد در بینهایت توابع کسری که صورت و مخرج آنها چند جمله می باشد داره . برای محاسبه حد توابع کسری وقتی $x\to +\infty$ یا $x \to -\infty$ میل می کند در صورت و مخرج از بزرگترین توان x فاکتور بگیر، ساده کن و حاصل حد رو پیدا کن .

یادت باشه : در توابع کسری وقتی $x \to \pm\infty$ میل می کند و صورت و مخرج کسر ∞ می شود و ابهام $\frac{\infty}{\infty}$ رخ می دهد می توان از قاعده پرتوان استفاده کرد یعنی در صورت و مخرج جمله ای که بزرگترین توان از x را دارد در نظر می گیریم و حد عبارت حاصل را محاسبه می کنیم .

$$\lim_{x\to\infty}\frac{ax^n+bx^{n-1}+.......}{a'x^m+b'x^{m-1}+.......}=\xrightarrow{\text{قاعده پرتوان}}\lim_{x\to\infty}\frac{ax^n}{a'x^m}=\begin{cases}\frac{a}{a'} & n=m\\ 0 & n<m\\ \infty & n>m\end{cases}$$

یعنی

۱) وقتی جواب حد عدد ناصفر بشه معنیش اینکه توان صورت و مخرج برابره

۲) اگه جواب حد صفر بشه توان مخرج بیشتر از توان صورته .

۳) اگه بی نهایت شد یعنی توان و مرتبه ی صورت بزرگتراز توان و مرتبه ی مخرجه .

۸۰) حاصل $\lim_{x\to-\infty}\left(9+\frac{7}{x^3}\right)$ چند برابر $\lim_{x\to-\infty}\frac{-6x^3+7x-9}{2x^3-4x^2+x}$ است ؟

$$\lim_{x\to-\infty}\left(9+\frac{7}{x^3}\right)=\lim_{x\to-\infty}9+\frac{7}{(-\infty)^3}=9+0=9$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{-6x^3+7x-9}{2x^3-4x^2+x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-6\cancel{x^3}}{2\cancel{x^3}}=\frac{-6}{2}=-3$$

هر دو تابع ، هنگامی که x شان بینهایت می شود ، عرض شان عدد شده، پس هر دو در بینهایت حد دارند و اولی -3 برابر دومی است .

۸۱) حدود زیر را محاسبه کنید

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2\sqrt{x}+x}{\sqrt{x}+2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x}}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-2x+4}{x^2+3x-2x^3}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{-2x^3}=\frac{-1}{2}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+3x-5}{x^3-x+1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x^3}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=\frac{1}{-\infty}=0$$

۸۲) حاصل حد $\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+2x+3}-x}{3x-1}$ را به دست آورید .

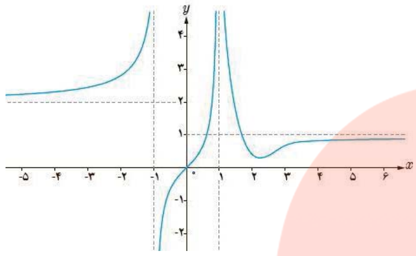
رادیکال میره به سمت ۱

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+2x+3}-x}{3x-1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2\left(1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}\right)}-x}{3x-1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{|x|\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}-x}{3x-1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x\left(\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}+1\right)}{3x}=\frac{-2x}{3x}=\frac{-2}{3}$$

۸۳) حاصل حد $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x^2+\sqrt{x^2+x}}{2x^2-3x-1}$ را حساب کنید .

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5x^2+\sqrt{x^2+x}}{2x^2-3x-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{5x^2}{2x^2}=\frac{5}{2}$$

۸۴) حاصل تمامی حدود زیر را محاسبه کنید .



$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=2$$

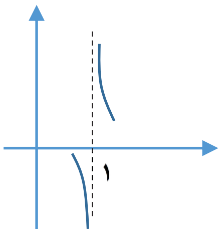
$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=1$$

$$\lim_{x\to-\infty}[f(x)]+\lim_{x\to+\infty}[f(x)]=[2^+]+[1^-]=2+0=2$$

$$\lim_{x\to1}f(x)=+\infty$$

$$\lim_{x\to-1}f(x)=\begin{cases}\lim\limits_{x\to-1^+}f(x)=-\infty\\ \lim\limits_{x\to-1^-}f(x)=+\infty\end{cases}$$

۸۵) حد کدام تابع شبیه شکل مقابل است ؟



۱) $\lim\limits_{x\to1}\frac{-x}{x-1}$

۲) $\lim\limits_{x\to1}\frac{1}{(x-1)^2}$

۳) $\lim\limits_{x\to1}\frac{1}{\sqrt{1-x}}$

۴) $\lim\limits_{x\to1}\frac{-1}{1-x}$

$$\lim_{x\to1}\frac{-1}{1-x}=\begin{cases}\lim\limits_{x\to1^+}\frac{-1}{1-x}=\frac{-1}{0^-}=+\infty\\ \lim\limits_{x\to1^-}\frac{-1}{1-x}=\frac{-1}{0^+}=-\infty\end{cases}$$

فصل ۴ مشتق

مشتق تابع در یک نقطه: فرض کنید تابع $f(x)$ در یک همسایگی نقطه‌ی a تعریف شده باشد. اگر حد $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ موجود باشد، یعنی عدد حقیقی شود اصطلاحاً می‌گوییم تابع $f(x)$ در $x=a$ مشتق پذیر است و مقدار آن را با نماد $f'(a)$ نمایش می‌دهیم.

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

تعریف دیگری که با تعریف فوق هم‌ارز است به صورت زیر است:

$$f'(a)=\lim_{h\to ۰}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

تذکر: اگر این حد عدد یکتایی نشود و یا وجود نداشته باشد، تابع $f(x)$ در نقطه‌ی $x=a$ مشتق ناپذیر است.

برای محاسبه مشتق تابع در یک نقطه از یکی از روش‌های زیر استفاده می‌شود.

$$۱)f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \qquad ۲)f'(a)=\lim_{h\to ۰}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

➢ در روش اول به شکل زیر عمل می‌کنیم:

۱. محاسبه $f(a)$ ۲. تعیین $f(x)-f(a)$ ۳. تشکیل و ساده کردن $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ ۴. محاسبه حد $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ که دارای ابهام $\frac{۰}{۰}$ است و روش‌های رفع ابهام آن را در حد دیدیم.

➢ در روش دوم به شکل زیر عمل می‌کنیم:

۱. محاسبه $f(a)$ ۲. تعیین $f(a+h)$ ۳. محاسبه $f(a+h)-f(a)$ ۴. محاسبه حد $\lim\limits_{h\to ۰}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ که دارای ابهام $\frac{۰}{۰}$ است.

۸۶) با استفاده از تعریف مشتق، مشتق‌پذیری تابع $f(x)=x|x-۲|$ را در نقطه $x=۲$ مورد بررسی قرار دهید. (شهریور ۹۴)

☑پاسخ:

$$f'(۲)=\lim_{x\to ۲}\frac{f(x)-f(۲)}{x-۲}=\lim_{x\to ۲}\frac{x|x-۲|-۰}{x-۲}=\begin{cases}\lim\limits_{x\to ۲^+}\frac{x(x-۲)}{x-۲}=۲=f'(۲^+)\\ \lim\limits_{x\to ۲^-}\frac{-x(x-۲)}{x-۲}=-۲=f'(۲^-)\end{cases}$$

تابع در این نقطه مشتق پذیر نیست. زیرا مشتق چپ و راست آن با هم برابر نیست.

۸۷) با استفاده از تعریف مشتق، مشتق تابع $f(x)=x^۲+۱$ را در نقطه‌ی $x=a$ محاسبه کنید. (خرداد ۹۴)

☑پاسخ:

$$f'(a)=\lim_{h\to ۰}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{(a+h)^۲+۱-a^۲-۱}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{a^۲+۲ah+h^۲+۱-a^۲-۱}{h}$$

$$=\lim_{h\to ۰}\frac{۲ah+h^۲}{h}=\lim_{h\to ۰}۲a+h=۲a$$

۸۸) با استفاده از تعریف، مشتق تابع $f(x)=\frac{۱}{x}$ را در نقطه $x=۱$ بررسی کنید.

☑پاسخ:

$$f'(۱)=\lim_{x\to ۱}\frac{f(x)-f(۱)}{x-۱}=\lim_{x\to ۱}\frac{\frac{۱}{x}-۱}{x-۱}=\lim_{x\to ۱}\frac{\frac{۱-x}{x}}{x-۱}=\lim_{x\to ۱}\frac{۱-x}{x(x-۱)}=\lim_{x\to ۱}\frac{-۱}{x}=-۱$$

۸۹) مشتق پذیری تابع $f(x)=|x^2-1|$ را در نقاط $x=1$ بررسی کنید.

☑پاسخ:

$$f'(1)=\lim_{x\to 1}\frac{|x^2-1|-0}{x-1}=\begin{cases}\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{(x-1)(x+1)}{x-1}=2=f'_+(1)\\[2ex] \lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{-(x-1)(x+1)}{x-1}=-2=f'_-(1)\end{cases}$$

تابع در این نقطه مشتق‌ناپذیر است.

۹۰) مشتق تابع $f(x)=x^3+3x$ را در نقطه‌ی $x=1$ با استفاده از تعریف مشتق بیابید.

☑پاسخ:

راه اول

$$f'(1)=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x^3+3x-4}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2+x+4)}{(x-1)}=\lim_{x\to 1}x^2+x+4=6$$

راه دوم

$$f'(1)=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(1+h)^3+3(1+h)-4}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(1+h^3+3h^2+3h)+(3+3h)-4}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{h^3+6h+3h^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h(h^2+3h+6)}{h}=\lim_{h\to 0}(h^2+3h+6)=6$$

۹۱) با استفاده از تعریف مشتق، مشتق تابع $f(x)=\sqrt{4-x}$ را به دست آورید. (هماهنگ کشوری ۸۸)

☑پاسخ:

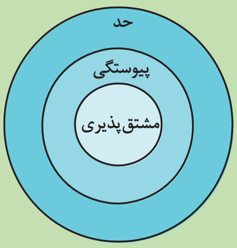
گویا کردن

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{4-(x+h)}-\sqrt{4-x}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{4-(x+h)}-\sqrt{4-x}}{h}\times\frac{\sqrt{4-(x+h)}+\sqrt{4-x}}{\sqrt{4-(x+h)}+\sqrt{4-x}}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{4-(x+h)-4+x}{h\left(\sqrt{4-(x+h)}+\sqrt{4-x}\right)}=\lim_{h\to 0}\frac{-h}{h\left(\sqrt{4-(x+h)}+\sqrt{4-x}\right)}=\frac{-1}{2\sqrt{4-x}}$$

مشتق راست: در تابع $y=f(x)$ اگر $\lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ موجود باشد (عدد شود) این حد را مشتق راست تابع $f(x)$ در $x=a$ نامیده و با نماد $f'_+(a)$ نشان می‌دهند.

مشتق چپ: در تابع $y=f(x)$ اگر $\lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ موجود باشد (عدد شود) این حد را مشتق چپ تابع $f(x)$ در $x=a$ نامیده و با نماد $f'_-(a)$ نشان می‌دهند.



هر تابع مشتق پذیر، پیوسته است ولی هر تابع پیوسته‌ای مشتق پذیر نیست.
عملاً پیوستگی شرط لازم مشتق پذیری است ولی کافی نیست.
یعنی توابعی وجود دارند که پیوسته‌اند ولی مشتق پذیر نیستند.

نکته

اگر تابعی در $x=a$ فقط پیوستگی راست داشته باشد در آن نقطه مشتق چپ ندارد و مشتق راست نیز باید بررسی شود و هم‌چنین اگر تابعی فقط پیوستگی چپ داشته باشد در آن نقطه مشتق راست ندارد و مشتق چپ آن باید بررسی شود.

روش حل مسئله

برای حل مسائل مربوط به مشتق پذیری در یک نقطه به روش زیر عمل کنید:

۱) پیوستگی تابع در $x=a$ را بررسی کنید. یعنی باید $\lim\limits_{x\to a^{\pm}} f(x)=f(a)$ اگر یکی از پیوستگی‌ها برقرار نبود مشتق آن نیز وجود ندارد. (عدم وجود مشتق را بیان کنید. به‌خصوص در توابع قدرمطلقی، چند ضابطه‌ای و براکتی)

۲) مشتق چپ و راست را ازراه تعریف بررسی می‌کنیم. اگرداشته باشیم: $f'(a)=\lim\limits_{x\to a^-}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ عدد شود می‌گوییم تابع در $x=a$ مشتق پذیر است.

۹۲) با استفاده از تعریف مشتق، مشتق‌های چپ و راست تابع $f(x)=|x-2|$ را در $x=2$ در صورت وجود بیابید. (خرداد ۹۲)

☑پاسخ: تابع در $x=2$ مشتق‌پذیر نیست.

بررسی پیوستگی

$$\lim_{x\to 2}|x-2|=0=f(2)\quad\Rightarrow\quad f'(2)=\lim_{x\to 2}\frac{|x-2|-0}{x-2}=\begin{cases}\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{x-2}{x-2}=1=f'_+(2)\\[2mm] \lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{-(x-2)}{x-2}=-1=f'_-(2)\end{cases}$$

۹۳) در جاهای خالی عبارت مناسب قرار دهید:

الف) دامنه‌ی مشتق پذیری تابع $f(x)=\sqrt{x}$ برابر است با ....

ب) شیب خط مماس بر نمودار تابع $g(x)=\dfrac{1}{x}$ در $x=1$ برابر است با ....

☑پاسخ:

الف) $f(x)=\sqrt{x}\ \Rightarrow\ D_f=[0,+\infty)$ $\qquad f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\ \Rightarrow\ D_{f'}=(0,+\infty)$

جواب نهایی

ب) $g'(x)=\dfrac{-1}{x^2}\ \Rightarrow\ m=g'(1)=-1$

جواب نهایی

۹۴) پاسخ هر عبارت ستون A را از بین گزینه‌های ستون B انتخاب کنید.

ستون A
۱) دامنه‌ی مشتق پذیری تابع $y=\sqrt{1-2x}$ کدام است؟
۲) مشتق چپ تابع $y=[2x]$ در نقطه‌ی $x=1$ کدام است؟
۳) در تابع $y=\|2-x\|$ حاصل $f'_+(2)+f'_-(2)$ کدام است؟

ستون B	
الف) ۱	د) صفر
ب) $(\frac{1}{2},+\infty)$	هـ) ۴
ج) وجود ندارد	و) $(-\infty,\frac{1}{2})$

☑پاسخ:

۱) گزینه‌ی «و» صحیح است.

$$1-2x\ge 0\ \Rightarrow\ D_f=\left(-\infty,\frac{1}{2}\right]\ \Rightarrow\ f'(x)=\frac{-2}{2\sqrt{1-2x}}\ \Rightarrow\ D_{f'}=\left(-\infty,\frac{1}{2}\right)$$

۲) گزینه‌ی «ج» صحیح است.تابع در $x=1$ پیوستگی چپ ندارد، بنابراین مشتق چپ آن وجود ندارد.

$$\lim_{x\to 1^-}[2x]=[2^-]=1\ne f(1)=2$$

۳) گزینه‌ی «د» صحیح است.

$$f'(2)=\lim_{x\to 2}\frac{|2-x|-0}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{|x-2|}{x-2}=\begin{cases}\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{|x-2|}{x-2}=1\\[2mm] \lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{|x-2|}{x-2}=-1\end{cases}\quad\Rightarrow\quad f'_+(2)+f'_-(2)=0$$

روش‌های محاسبه‌ی مشتق توابع:

$$f(x)=c \quad\Rightarrow\quad f'(x)=0$$

مشتق تابع ثابت صفره

$$f(x)=\sin^2 x+\cos^2 x \quad\Rightarrow\quad f'(x)=(1)'=0$$

$$f(x)=ax^n \quad\Rightarrow\quad f'(x)=nax^{n-1}$$

$$f(x)=au^n \quad\Rightarrow\quad f'(x)=anu^{n-1}u'$$

$$f(x)=2x^7 \quad\Rightarrow\quad f'(x)=14x^6$$

$$h(x)=f(x)\pm g(x) \quad\Rightarrow\quad h'(x)=f'(x)\pm g'(x)$$

مهمه

$$h(x)=f(x)\times g(x) \quad\Rightarrow\quad h'(x)=f'(x)g(x)+g'(x)f(x)$$

$$f(x)=\left(2x^2+3x-1\right)\left(4x^3+2x^2+3\right) \quad\Rightarrow\quad f'(x)=(4x+3)\left(4x^3+2x^2+3\right)+\left(12x^2+4x\right)\left(2x^2+3x-1\right)$$

مهم

$$h(x)=\frac{f(x)}{g(x)} \quad\Rightarrow\quad h'(x)=\frac{f'(x)g(x)-g'(x)f(x)}{g^2(x)}$$

$$h(x)=\frac{x^2+1}{x-1} \quad\Rightarrow\quad h'(x)=\frac{2x(x-1)-(1)\left(x^2+1\right)}{(x-1)^2}$$

$$f(x)=\frac{ax+b}{cx+d} \quad\Rightarrow\quad f'(x)=\frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$$

$$f(x)=\frac{au+b}{cu+d} \quad\Rightarrow\quad f'(x)=\frac{ad-bc}{(cu+d)^2}u'$$

$$f(x)=\sqrt[n]{u^m} \quad\Rightarrow\quad f'(x)=\frac{mu'}{n\sqrt[n]{u^{n-m}}}$$

نکته

$$y=\left(\text{عبارت های جبری}\right)^n \;\rightarrow\; y'=n\times\left(\text{مشتق عبارت جبری}\right)\times\left(\text{عبارت های جبری}\right)^{n-1}$$

۹۵) مشتق بگیرید.

۱) $f(x)=\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}} \quad\Rightarrow\quad f'(x)=\frac{1}{2}(1)x^{\frac{1}{2}-1}=\frac{1}{2}x^{\frac{-1}{2}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$

توان — مشتق عبارت کسری — عبارت کسری با یک توان کمتر

۲) $f(x)=\left(\frac{2x+1}{x-2}\right)^4 \quad\Rightarrow\quad f'(x)=(4)\left(\frac{2(x-2)-(1)(2x+1)}{(x-2)^2}\right)\left(\frac{2x+1}{x-2}\right)^3$

۳) $f(x)=\frac{\left(3x^2-1\right)^3}{x+1} \quad\Rightarrow\quad f'(x)=\frac{3(6x)\left(3x^2-1\right)^2(x+1)-\left(3x^2-1\right)^3(1)}{(x+1)^2}$

۴) $y=\sqrt{x}(2x-1)^5 \quad\Rightarrow\quad y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}(2x-1)^5+5(2)(2x-1)^4\sqrt{x}$

۵) $y=\frac{x^2-1}{(3x+5)^2} \quad\Rightarrow\quad y'=\frac{2x(3x+5)^2+2(3)(3x+5)\left(x^2-1\right)}{(3x+5)^4}$

۹۶) مشتق توابع زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست.)

$1)\ f(x)=\left(\dfrac{2x+1}{x}\right)^5$ $\qquad$ $2)\ g(x)=(\sqrt{5-7x})(4-\dfrac{x}{3})$

☑پاسخ:

$$1)\ y'=5\left(\frac{2(x)-(1)(2x+1)}{x^2}\right)\left(\frac{2x+1}{x}\right)^4$$

$$2)\ y'=\frac{-7}{2\sqrt{5-7x}}(4-\frac{x}{3})-\frac{1}{3}(\sqrt{5-7x})$$

مشتق توابع مرکب

فرض کنیم تابع $g(x)$ در نقطه‌ی $x=a$ مشتق پذیر و تابع $f(x)$ در $g(a)$ مشتق پذیر باشد. آن‌گاه تابع $h(x)=f(g(x))$ در $x=a$ مشتق پذیر است و داریم:

$$h(x)=f(g(x)) \quad\Rightarrow\quad h'(a)=g'(a)f'(g(a))$$

$$\left(f(u)\right)'=u'f'(u) \quad , \quad \left((u)^m\right)'=m(u')(u)^{m-1}$$

۹۷) اگر $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(2-h)-f(2)}{h}=\dfrac{-2}{3}$ باشد، مشتق تابع $f\left(\sqrt{x-1}\right)$ در $x=5$ را به دست آورید.

☑پاسخ:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(2-h)-f(2)}{h}=-\lim_{h\to 0}\frac{f(2-h)-f(2)}{-h}=-f'(2)=\frac{-2}{3}\Rightarrow f'(2)=\frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow\ \left(f\left(\sqrt{x-1}\right)\right)'=\left(\frac{1}{2\sqrt{x-1}}f'\left(\sqrt{x-1}\right)\right)_{x=5}=\frac{1}{4}f'(2)=\frac{1}{4}\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{1}{6}$$

۹۸) اگر $f'(x)=\dfrac{1}{2x^2+3}$ باشد، آن‌گاه مشتق تابع $f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ را در $x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ به دست آورید.

☑پاسخ:

$$\left(f\left(\frac{1}{x}\right)\right)'=\frac{-1}{x^2}f'\left(\frac{1}{x}\right)_{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\left(\frac{-1}{x^2}\right)\times\left(\frac{1}{2\left(\frac{1}{x}\right)^2+3}\right)_{\frac{\sqrt{2}}{2}}=-2\times\frac{1}{2\times(2)+3}=\frac{-2}{7}$$

۹۹) اگر $f'(x)=\sqrt{x^2+1}$ باشد، مشتق تابع $y=f\left(5x^2-x\right)$ را نسبت به x تعیین کنید. (هماهنگ کشوری ۸۵)

☑پاسخ:

$$y=f\left(5x^2-x\right)\Rightarrow y'=(5x^2-x)'f'(5x^2-x)\Rightarrow y'=(10x-1)f'\left(5x^2-x\right)=(10x-1)\sqrt{\left(5x^2-x\right)^2+1}$$

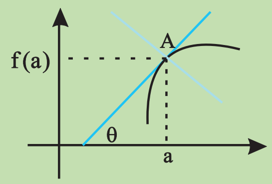
۱۰۰) مشتق $f\left(\sqrt[3]{6x+2}\right)$ در نقطه‌ی $x=1$ برابر -2 است. مشتق تابع f در نقطه‌ای به طول ۲ کدام است؟

☑ پاسخ: $\sqrt[3]{6x+2}=2 \Rightarrow x=1$

$$\sqrt[3]{6x+2}=2\Rightarrow x=1\Rightarrow\left(f\left(\sqrt[3]{6x+2}\right)\right)_{x=1}=\left(\frac{6}{3\sqrt[3]{(6x+2)^2}}f'\left(\sqrt[3]{6x+2}\right)\right)_{x=1}=\frac{6}{12}f'(2)=-2\Rightarrow f'(2)=-4$$

شیب خط مماس بر منحنی و معادله‌ی خط مماس و قائم در نقطه‌ای روی منحنی:

اگر خط L در نقطه‌ای به طول a واقع بر منحنی نمایش تابع $y=f(x)$ مماس باشد، شیب خط مماس از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید:



شیب خط مماس در نقطه‌ی A

$$m=\tan\theta=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)$$

روش حل مسئله

۱) اول مختصات نقطه‌ای که می‌خواهیم مماس یا قائم در آن رابنویسیم معلوم کنید. $A\left|\begin{matrix}a\\f(a)\end{matrix}\right.$

۲) از تابع $f(x)$ مشتق بگیرید و $f'(a)$ را تعیین کنید این همان شیب خط مماس است. $m=f'(a)$ و

$m'=\frac{-1}{f'(a)}$ *شیب خط قائم است. (بعضی وقتا این مشتق رو از راه تعریف می‌خوان)*

۳) معادله‌ی خط مماس و معادله‌ی خط قائم به شکل زیر نوشته می‌شوند:

$L:\quad y-f(a)=f'(a)(x-a)$ *خط مماس* $\qquad L':\quad y-f(a)=\frac{-1}{f'(a)}(x-a)$ *خط قائم*

۱۰۱) با استفاده از تعریف مشتق، مشتق تابع $y=x^2-1$ را در نقطه‌ای به طول ۱ محاسبه نماید. سپس به کمک آن معادله‌ی خط مماس بر منحنی این تابع را در نقطه‌ای به طول ۲ واقع بر منحنی تابع بنویسید. (شهریور ۹۴ خارج کشور)

☑پاسخ:

$$f'(1)=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1-(1-1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}(x+1)=2$$

$$A\left|\begin{matrix}2\\(2)^2-1=3\end{matrix}\right.\quad\Rightarrow\quad L:\quad y-3=2(x-2)$$

۱۰۲) معادله‌ی خط مماس بر نمودار تابع $y=\frac{x}{x-2}$ را در نقطه‌ی $A(3,3)$ به دست آورید. (خرداد ۹۲)

☑پاسخ:

$$y'=\frac{-2}{(x-2)^2}\quad\Rightarrow\quad m=y'_{(3)}=-2\quad\Rightarrow\quad y-3=-2(x-3)$$

۱۰۳) با استفاده از تعریف، مشتق تابع $f(x)=x^3$ را در نقطه دلخواه a حساب کنید. سپس معادله خط قائم بر نمودار تابع را در نقطه $A(1,1)$ به دست آورید.

☑پاسخ:

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{x^3-a^3}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{(x-a)(x^2+ax+a^2)}{x-a}=3a^2$$

$$f(x)=x^3\ \Rightarrow\ f'(x)=3x^2\ \Rightarrow\ f'(1)=3(1)^2=3=m\ \Rightarrow\ m'=\frac{-1}{3}\ \Rightarrow\ L:\ y-1=\frac{-1}{3}(x-1)$$ *خط قائم*

۱۰۴) معادله‌ی خط مماس بر تابع $f(x)=\sqrt[3]{x-1}$ در نقطه‌ی $x=1$ را بنویسید.

☑پاسخ:

$$f(x)=\sqrt[3]{x-1}\quad\Rightarrow\quad f'(1)=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x-1}-0}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}=\frac{1}{0^+}=+\infty$$

بنابراین خط مماس بر تابع در $x=1$ خطی موازی محور y هاست و معادله‌ی آن همان طول نقطه است. $L:\quad x=1$

آهنگ تغییر و آهنگ متوسط

نکته

شیب خط مماس بر تابع، تغییر آهنگ یا تغییر آنی، تغییرات لحظه‌ای، همگی یعنی مشتق تابع در نقطه‌ی داده شده

تغییر آهنگ = شیب خط مماس در نقطه‌ی $A(a,f(a))$ $= m = f'(a)=\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$

۱۰۵) تابع $f(x)$ با ضابطه‌ی $f(x)=x^2+5x+4$ داده شده است.

الف) دستور کلی آهنگ متوسط تغییر این تابع را نسبت به متغیر x تعیین کنید.

ب) آهنگ متوسط تغییر این تابع را وقتی $x=3$, $\Delta x=0/4$ را به دست آورید.

ج) آهنگ آنی را در $x=3$ به دست آورید.

☑پاسخ:

الف) $$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{(x+\Delta x)^2+5(x+\Delta x)+4-(x^2+5x+4)}{\Delta x}$$

ب) $$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{(3+0/4)^2+5(3+0/4)+4-((3)^2+5(3)+4)}{0/4}=\frac{1/2+0/16+2}{0/4}=\frac{3/36}{0/4}$$

ج) $$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=f'(x)\quad\Rightarrow\quad f'(3)=(x^2+5x+4)'_3=(2x+5)_3=11$$

۱۰۶) اگر $f(t)=t^2+3t$ نمایش جمعیت یک نوع باکتری در زمان t باشد ، نسبت آهنگ متوسط تغییر f در بازه ی زمانی $1\le t\le 1/2$ به آهنگ لحظه ای تغییر f در $t=1$ کدام است ؟

$$\frac{f(1/2)-f(1)}{1/2-1}=\frac{((1/2)^2+3(1/2))-(1+3)}{0/2}=\frac{10/4}{2}=5/2$$

$$f'(1)=(2t+3)_{x=1}=5\quad\Rightarrow\quad\frac{5/2}{5}=1/04$$

۱۰۷) در چه نقطه ای از بازه $[9,25]$ آهنگ لحظه ای $f(x)=\sqrt{x}$ با آهنگ متوسط آن برابر است ؟

$$\frac{f(25)-f(9)}{25-9}=\frac{\sqrt{25}-\sqrt{9}}{16}=\frac{2}{16}\quad,\quad f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}\Rightarrow\frac{1}{8}=\frac{1}{2\sqrt{x}}\Rightarrow\sqrt{x}=4\Rightarrow x=16$$

۱۰۸) گنجایش ظرفی ۴۰ لیتر مایع است. در لحظه $t=0$ سوراخی در ظرف ایجاد میشود اگر حجم مایع باقی مانده در ظرف پس از t ثانیه از رابطه ی $V_{(t)}=40\left(1-\frac{t}{100}\right)^2$ به دست می آید در چه زمانی آهنگ تغییر لحظه ای برابر آهنگ تغییر متوسط آن در بازه $[0,100]$ می شود ؟

$$\frac{V(100)-V(0)}{100-0}=\frac{0-40}{100}=\frac{-4}{10}\quad,\quad V'(t)=80\left(\frac{-1}{100}\right)\left(1-\frac{t}{100}\right)=\frac{-80}{100}\left(1-\frac{t}{100}\right)=\frac{-4}{100}$$

$$2-\frac{t}{50}=1\quad\Rightarrow\quad t=50$$

حالا آهنگ تغییر رو مساوی تغییرات متوسط قرار می دیم

فصل ۵ کاربرد مشتق

برای تعیین یکنوایی تابع پیوسته $f(x)$ (صعودی یا نزولی بودن تابع)، ابتدا از تابع مشتق می‌گیریم و تابع مشتق را تعیین علامت می‌کنیم در بازه‌هایی که مشتق مثبت باشد، یعنی تابع صعودی است و در بازه‌هایی که مشتق منفی است، یعنی تابع نزولی است.

x		x_1		x_2	
f'	+	0	−	0	+
f	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

روش حل مسئله

۱) اول از تابع مشتق بگیرید.
۲) معادله $f'(x)=0$ را حل کنید و ریشه‌های مشتق را به دست آورید.
۳) با توجه به ریشه‌ها، مشتق را تعیین علامت کنید. (ممکن است احتیاج به جدول داشته باشید.)
۴) در هر بازه‌ای که علامت مشتق مثبت باشد یعنی تابع $f(x)$ صعودی است. و در هر بازه‌ای که علامت مشتق منفی باشد یعنی تابع $f(x)$ نزولی است.

۱۰۹) در چه بازه‌ای تابع $f(x)=3x^2-18x$ صعودی است؟

☑پاسخ:

$$f(x)=3x^2-18x \quad\Rightarrow\quad f'(x)=6x-18=0 \quad\Rightarrow\quad x=3$$

x		$x=3$	
f'	−	0	+

تابع در بازه‌ی $(-\infty,3)$ نزولی و در بازه‌ی $(3,+\infty)$ صعودی است.

۱۱۰) تعیین کنید تابع $f(x)=2x-\sqrt{x}$ در کدام بازه نزولی است

☑پاسخ:

یعنی باید بازه ای را تعیین کنیم که مشتق تابع در این بازه همواره منفی باشد.

$$f'(x)=2-\frac{1}{2\sqrt{x}}<0 \;\Rightarrow\; 2<\frac{1}{2\sqrt{x}} \;\Rightarrow\; \sqrt{x}<\frac{1}{4} \;\Rightarrow\; x<\frac{1}{16} \xrightarrow{\text{با توجه به دامنه}} 0\le x<\frac{1}{16}$$

۱۱۱) تابع $f(x)=\frac{1}{x^2}$ را روی بازه‌ی $(0,+\infty)$ در نظر بگیرید. صعودی یا نزولی بودن این تابع را روی بازه ی $(0,+\infty)$ تعیین کنید.

☑پاسخ:

$$f(x)=\frac{1}{x^2} \quad\Rightarrow\quad f'(x)=\frac{-2x}{x^4}=\frac{-2}{x^3} \quad\Rightarrow\quad \forall\in(0,+\infty) \quad f'(x)<0$$

بنابراین در بازه $(0,+\infty)$ تابع نزولی است.

۱۱۲) تابع $f(x)=\frac{2}{x}+x^2$ در چه فاصله‌ای صعودی است؟

☑پاسخ:

$$f(x)=\frac{2}{x}+x^2 \Rightarrow f'(x)=\frac{-2}{x^2}+2x=\frac{2(x^3-1)}{x^2}\ge 0 \;\Rightarrow x^3-1\ge 0 \;\Rightarrow x\ge 1$$

اکسترمم های نسبی

نقاط بحرانی

نقطه ی $x=a$ متعلق به دامنه تابع را نقطه بحرانی تابع f می نامند هرگاه در یک همسایگی متقارن پیرامون این نقطه تابع تعریف شده باشد و مشتق تابع در این نقطه صفر یا وجود ندارد ، شود .

$$\begin{cases} (1) \quad a\in D_f \\ (2) \quad f'(a)=0 \quad \vee \quad f'(a) \ \text{وجود ندارد} \end{cases}$$

برای به دست آوردن نقاط بحرانی تابع با توجه به دامنه از تابع مشتق می گیریم و می پرسیم f' کجا صفر می شود یا کجا وجود ندارد .

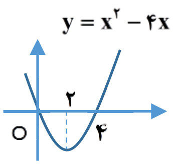
انواع وجود ندارد : الف کجا ناپیوسته است ب) کجا مشتق چپ وراست نابرابرند ج) کجا مشتق بی نهایتی می شود .

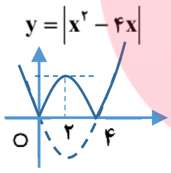
۱۱۳) نقاط بحرانی تابع با ضابطه ی $y=\sqrt[3]{x^3-3x^2}$ را به دست آورید .

$$D_f=R \ , \ f'(x)=\frac{3x^2-6x}{3\sqrt[3]{(x^3-3x^2)^2}} \Rightarrow \begin{cases} f'=0 & 3x^2-6x=3x(x-2)=0 \Rightarrow x=0 \ , \ x=2 \\ f'_{\text{وجود ندارد}} & x^3-3x^2=x^2(x-3)=0 \Rightarrow x=0 \ , \ x=3 \end{cases}$$

مجموعه نقاط بحرانی : $\{0,2,3\}$

۱۱۴) نمودار تابع $f(x)=|x^2-4x|$ رسم کنید و نقاط بحرانی تابع را تعیین کنید .





$$f(x)=\begin{cases} x^2-4x & x<0 \\ -(x^2-4x) & 0\le x\le 4 \\ x^2-4x & x>4 \end{cases} \Rightarrow f'(x)=\begin{cases} 2x-4 & x<0 \\ -(2x-4) & 0\le x\le 4 \\ 2x-4 & x>4 \end{cases}$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow -(2x-4)=0 \Rightarrow x=2$$

در این نقطه مشتق صفر است

در $x=4 , x=0$ مشتق وجود ندارد

$$\begin{cases} f'_-(0)=-4 \ , \ f'_+(0)=4 \\ f'_-(4)=-4 \ , \ f'_+(4)=4 \end{cases}$$

این نقاط زاویه دارند .

تابع سه نقطه بحرانی دارد . $\{0 \ , \ 2 \ , \ 4\}$

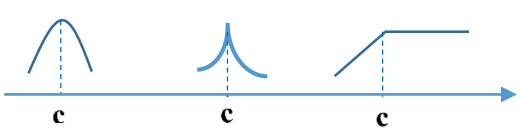
با توجه به تعریف نقاط ابتدا و انتهای بازه نقاط بحرانی تابع نیستند.

واژه اکسترمم نسبی برای ماکسیمم و مینیمم تابع بکار برده می شود که تعاریف آنها به شرح زیر است .

نقطه $x=c$ طول ماکسیمم نسبی تابع f است که اولاً در یک همسایگی متقارن این نقطه تابع تعریف شده باشد ، و ثانیا عرض این نقطه از تمامی عرض های این همسایگی بزرگتر یا مساوی است . به زبان ریاضی یعنی :

$$1) \ \forall x\in(c-\delta,c+\delta)\Rightarrow f(c)\ge f(x)$$

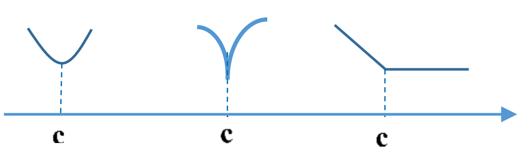
در این حالت $f(c)$ را مقدار ماکسیمم نسبی تابع f می نامند .



نقطه $x=c$ طول مینیمم نسبی تابع f است که اولاً در یک همسایگی متقارن این نقطه ، تابع تعریف شده باشد ، و ثانیاً عرض این نقطه از تمامی عرض های این همسایگی کوچکتر یا مساوی است . به زبان ریاضی یعنی :

$$2) \ \forall x\in(c-\delta,c+\delta)\Rightarrow f(c)\le f(x)$$

در این حالت $f(c)$ را مقدار مینیمم نسبی تابع f می نامند .



نقاط ابتدا و انتهای بازه نمی توانند اکسترمم نسبی باشند زیرا تابع در همسایگی متقارن آن ها تعریف نشده .

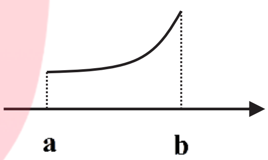
قضیه فرما : اگر در نقطه ی $x=a$ تابع $f(x)$ ماکزیمم یا مینیمم نسبی داشته باشد ، و $f'(a)$ موجود باشد آنگاه $f'(a)=0$ خواهد بود به عبارت دیگر هر نقطه اکسترمم نسبی تابع یک نقطه بحرانی آن است ولی عکس قضیه فرما در حالت کلی درست نیست .

ماکسیمم مطلق : اگر $x=a$ نقطه ای از دامنه تابع به طوری که برای هر $x\in D_f$ داشته باشیم $f(a)\ge f(x)$ یعنی عرض نقطه a از تمامی عرض های این تابع در تمام دامنه بزرگتر یا مساوی باشد . آنگاه $f(a)$ ماکسیمم مطلق تابع f می نامیم

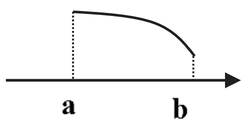
مینیمم مطلق : اگر $x=a$ نقطه ای از دامنه تابع به طوری که برای هر $x\in D_f$ داشته باشیم $f(a)\le f(x)$ یعنی عرض نقطه a از تمامی عرض های این تابع در تمام دامنه کوچکتر یا مساوی باشد . آنگاه $f(a)$ مینیمم مطلق تابع f می نامیم .

در توابع یکنوا به راحتی ماکسیمم و مینیمم مطلق را می توان تعیین نمود .

$$\text{if}\quad \forall x\in(a,b)\quad f'(x)>0 \quad\Rightarrow\quad f\uparrow \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} y_{max}=f(b)\\ y_{min}=f(a)\end{cases}$$



$$\text{if}\quad \forall x\in(a,b)\quad f'(x)<0 \quad\Rightarrow\quad f\downarrow \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} y_{max}=f(a)\\ y_{min}=f(b)\end{cases}$$



هر تابع پیوسته در بازه ای بسته ماکسیمم و مینیمم مطلق دارد .

برای تعیین min,max مطلق تابع پیوسته $y=f(x)$ در بازه $[a,b]$ ابتدا نقاط بحرانی تابع را تعیین کرده و جدو ل زیر را تنظیم می کنیم .

x	a	x_1	x_2	x_3	x_4..................x_n	b
$f(x)$	$f(a)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$	$f(x_3)$...............$f(x_n)$		$f(b)$

سطر اول نقاط بحرانی تابع در این فاصله و نقاط ابتدا و انتهای بازه و سطر دوم مقادیر تابع به ازای این نقاط می با شد . آنگاه بیشترین مقدار سطر دوم ماکسیمم مطلق و کمترین مقدار سطر دوم مینیمم مطلق تابع در این بازه خواهد بود .

۱۱۵) بیشترین مقدار تابع $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$ ، در بازه‌ی $[-2,2]$ ، کدام است؟

ابتدا از تابع مشتق می گیریم و نقاط بحرانی را تعیین و مقادیر تابع به ازای این نقاط را به دست می آوریم . عرض نقاط بحرانی تابع را بازه ی $(-2,2)$

$$f = x^3 - 3x^2 - 9x + 5 \Rightarrow f' = 3x^2 - 6x - 9 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \Rightarrow & f(-1) = -1 - 3 + 9 + 5 = 10 \\ x = 3 \notin (-2,2) \end{cases}$$

عرض تابع را در نقاط ابتدایی و انتهایی این بازه به دست می آوریم.داریم:

$$\begin{cases} f(-2) = -8 - 12 + 18 + 5 = 3 \\ f(2) = 8 - 12 - 18 + 5 = -17 \end{cases}$$

درآخر بین مقادیر به دست آمده ،بیشترین مقدار را به عنوان ماکزیمم مطلق تابع در این بازه معرفی می کنیم:

x	-2	-1	2
$f(x)$	3	10	-17

$y_{max} = 10$

۱۱۶) ماکزیمم و مینیمم مطلق تابع $f(x) = |x|(x+1)$ در فاصله $[-2,1]$ را به دست آورید .

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + x & x > 0 \\ -x^2 - x & x \le 0 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} 2x + 1 & x > 0 & \Rightarrow 2x + 1 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2} \quad \text{غ ق ق} \\ \text{موجود نیست} & x = 0 \\ -2x - 1 & x < 0 & \Rightarrow -2x - 1 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2} \quad \text{ق ق} \end{cases}$$

x	-2	$\frac{-1}{2}$	0	1
$f(x)$	-2	$\frac{1}{4}$	0	2

مینیمم مطلق   ماکزیمم مطلق

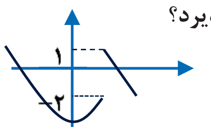
۱۱۷) به ازای چه مقادیر a و b نقطه‌ی $A\left|\begin{matrix} -1 \\ 2 \end{matrix}\right.$ min تابع $y = x^2 + ax + b$ می‌باشد؟

پاسخ : اگر یک نقطه اکسترمم یک تابع چند جمله ای خطی باشه اولاً باید مختصاتش در ضابطه تابع صدق کنه و ثانیاً طول این نقطه باید مشتق اول تابع رو صفر کنه .

$$y' = 2x + a = 0 \Rightarrow x = \frac{-a}{2} = -1 \Rightarrow a = 2$$
$$f(-1) = 1 - 2 + b = 2 \Rightarrow b = 3$$

> در توابع نا پیوسته در حالت کلی نمی توان از نکته فوق برای تعیین ماکسیمم و مینیمم مطلق استفاده نمود ، و بهتر است نمودار تابع ، مورد بررسی قرار گیرد .

۱۱۸) اگر تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 - 3 & ;x < 1 \\ a & ;x = 1 \\ 3 - 2x & ;x > 1 \end{cases}$ در $x = 1$ ماکزیمم یا می‌نیمم نسبی داشته باشد، a چند مقدار صحیح را نمی‌تواند بپذیرد؟



پاسخ با توجه به شکل داریم :

$$\left.\begin{matrix} (\text{ماکزیمم نسبی}) \; x = 1 \Rightarrow a \ge 1 \\ (\text{مینیمم نسبی}) \; x = 1 \Rightarrow a < -2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow a \in R - [-2,1)$$

پس a سه مقدار صحیح ۲−و ۱−و ۰ را نمی‌تواند بپذیرد.

بهینه سازی

روش حل مسئله

روش کلی بهینه سازی :

۱- در صورت نیاز ترسیم شکل برای درک بهتر مسئله . (به خصوص هنگامی که ایده ی اولیه ندارید)

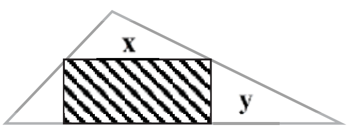
۲- ایجاد رابطه بین معلومات و مجهولات مسئله و فرموله کردن آن و تبدیل آن به یک تابع یک متغیره.

۳- پس از تشکیل تابع مسئله ، نقاط بحرانی تابع را تعیین، مقادیر تابع ، به ازاء نقاط بحرانی را به دست می آوریم و با توجه به ماهیت سوال ، ماکزیمم یا مینیمم حاصل از تابع جواب مسئله خواهد بود.

۱۱۹) کم ترین فاصله منحنی $y = x^۲$ از خط $y - ۴x + ۲ = ۰$ را به دست آورید ؟

$$h(x) = \frac{|x^۲ - ۴x + ۲|}{\sqrt{۱+۱۶}} \Rightarrow h'(x) = ۲x - ۴ = ۰ \Rightarrow x = ۲ \Rightarrow h(۲) = \frac{|۴ - ۸ + ۲|}{\sqrt{۱۷}} = \frac{۲}{\sqrt{۱۷}}$$

۱۲۰) اگر قاعده مثلث ۳۶ و ارتفاع آن ۱۲ باشد در شکل مقابل بیشترین مساحت ناحیه هاشور زده کدام ا ست ؟



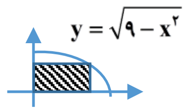
اینجا تالس زدیم

پاسخ

$$\frac{x}{۳۶} = \frac{۱۲ - y}{۱۲} \Rightarrow x = ۳(۱۲ - y) \Rightarrow S = xy \Rightarrow S = ۳(۱۲ - y)y = ۳۶y - ۳y^۲$$

$$S'_y = ۳۶ - ۶y = ۰ \Rightarrow y = ۶ \Rightarrow S_{max} = S_{(y=۶)} = (۳۶)(۶) - ۳(۶)^۲ = ۱۰۸$$

۱۲۱) اگر شعاع ربع دایره ۳ باشد ، بیش ترین مساحت مستطیل محاط شده در شکل را بدست آورید .



پاسخ

$$y = \sqrt{۹ - x^۲} \quad , \quad ۰ \le x \le ۳$$

$$S(x) = xy = x\sqrt{۹ - x^۲} \Rightarrow S'(x) = \sqrt{۹ - x^۲} + \frac{-x^۲}{\sqrt{۹ - x^۲}} = \frac{۹ - ۲x^۲}{\sqrt{۹ - x^۲}} = ۰ \Rightarrow x^۲ = \frac{۹}{۲} \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{۹}{۲}}$$

x	۰	$\sqrt{\frac{۹}{۲}}$	۳
$S(x)$	۰	$\frac{۹}{۲}$	۰

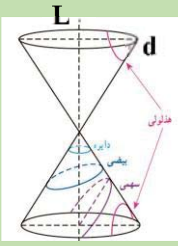
۱۲۲)غلظت یک داروی شیمیایی در خون t ساعت پس از تزریق از رابطه ی $f(t) = \frac{t}{t^۳ + ۵۴}$ به دست می آید چند ساعت پس از تزریق غلظت آن در خون بیشترین مقدار ممکن را خواهد داشت .

پاسخ

$$f'(t) = \frac{۱ \times (t^۳ + ۵۴) - ۳t^۲ \times t}{(t^۳ + ۵۴)^۲} = \frac{-۲t^۳ + ۵۴}{(t^۳ + ۵۴)^۲} \Rightarrow f'(t) = ۰ \Rightarrow -۲t^۳ + ۵۴ = ۰ \Rightarrow t^۳ = ۲۷ \Rightarrow t = ۳$$

فصل ۶ هندسه

اگر خط **d** را حول محور **L** (که با آن متقاطع است) دوران دهیم. دو تا مخروط ایجاد می شود که در راس به هم متصل شده اند . حال اگر رویه مخروطی را با صفحه **p** قطع دهیم . موارد زیر رخ می دهد .



الف) صفحه **p** بر محور **L** عمود باشد . دایره حاصل می شود .

ب) صفحه **p** بر محور **L** عمود نباشد و موازی مولد **d** هم نباشد بیضی حاصل می شود .

ج) صفحه **p** موازی محور **L** مخروط باشد . هذلولی حاصل می شود .

د) صفحه **p** موازی مولد **d** باشد . سهمی حاصل می شود .

ه) صفحه **p** از راس دو مخروط بگذرد . نقطه حاصل می شود .

اگر کره را با یک صفحه قطع دهیم همواره سطح مقطع دایره خواهد بود .

اگر یک استوانه قائم را با یک صفحه قطع دهیم ممکن است مستطیل ، بیضی ، دایره ایجاد شود .

اگر پاره خطی حول محوری موازی خودش دوران کند سطح استوانه حاصل می شود .

اگر یک مستطیل حول یکی از اضلاعش دوران کند استوانه ساخته می شود .

اگر یک مربع یا لوزی حول یک قطر خود دوران کند دو مخروط حاصل می شود .

۱۲۳)جا های خالی را با عبارات مناسب پر کنید .

۱ – شکل حاصل از دوران یک ربع دایره حول شعاع عمود بر قطر آن یک .... است .

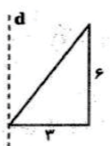
۲ – شکل حاصل از دوران یک مثلث قائم الزاویه حول یکی از اضلاع قائمه ....است .

۳ – شکل حاصل از دوران یک مثلث قائم الزاویه حول وتر آن .... است .

۴ – اگر یک لوزی با طول قطر های ۶ و ۴ را حول قطر بزرگ آن دوران دهیم حجم شکل حاصل .... است .

۱) نیمکره　　۲) مخروط　　۳) دو مخروط هم قاعده　　۴) دو مخروط هم قاعده به حجم 8π

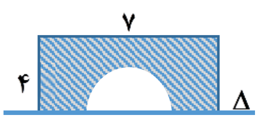
۱۲۴) اگر مثلث قائم الزاویه شکل روبرو را حول خط **d** دوران دهیم حجم شکل حاصل را به دست آورید .



با این دوران حجم حاصل عملا تفاضل حجم استوانه از مخروط خواهد بود.

$$\underbrace{V}_{\text{حجم مورد نظر}} = \underbrace{Vo}_{\text{حجم استوانه}} - \underbrace{V_m}_{\text{حجم مخروط}} = \pi(۳)^۲(۶) - \frac{۱}{۳}\pi(۳)^۲(۶) = ۳۶\pi$$

۱۲۵)در شکل مقابل حجم حاصل از دوران شکل ، حول خط Δ هنگامی که قطر نیم دایره ۴ باشد را به دست آورید.



با این دوران حجم حاصل عملاً تفاضل حجم استوانه ای با شعاع ۴ و ارتفاع ۷ و یک کره با شعاع ۲ خواهد بود .

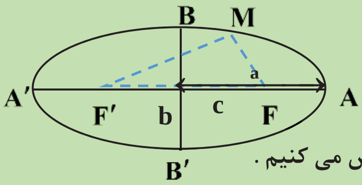
$$\underbrace{V}_{\text{حجم مورد نظر}} = Vo - V_k = \underbrace{\pi(۴)^۲(۷)}_{\text{حجم استوانه}} - \underbrace{\frac{۴}{۳}\pi(۲)^۳}_{\text{حجم کره}} = \pi(\frac{۳۰۴}{۳})$$

بیضی

بیضی مکان هندسی نقاطی از صفحه است که مجموع فواصل آن ها از دو نقطه ثابت (کانون ها F , F') مقدار ثابت $2a$ است که $2a$ طول قطر بزرگ یا کانونی بیضی نامیده می شود .

$$AA' = 2a \quad , \quad BB' = 2b \quad , \quad FF' = 2c \quad , \quad MF + MF' = 2a \quad , \quad a^2 = b^2 + c^2$$

قطر کانونی — قطر نا کانونی — فاصله کانونی



در شکل مقابل

۱) نقاط F و F' را کانون های بیضی می گوییم .

۲) فاصله بین دو کانون را که مقدار ثابتی ا ست فاصله کانونی بیضی می گوییم و آن را برابر $F'F = 2c$ فرض می کنیم .

۳) پاره خط $A'A$ را قطر بزرگ و محور کانونی و پاره خط $B'B$ را قطر کوچک و محور نا کانونی می گوییم .

مختصات نقاط مهم در بیضی افقی

$$O\begin{vmatrix}\alpha\\ \beta\end{matrix}\quad A\begin{vmatrix}\alpha+a\\ \beta\end{matrix}\quad A'\begin{vmatrix}\alpha-a\\ \beta\end{matrix}\quad F\begin{vmatrix}\alpha+c\\ \beta\end{matrix}\quad F'\begin{vmatrix}\alpha-c\\ \beta\end{matrix}\quad B\begin{vmatrix}\alpha\\ \beta+b\end{matrix}\quad B'\begin{vmatrix}\alpha\\ \beta-b\end{matrix}$$

و

$$O = \frac{A+A'}{2} = \frac{B+B'}{2} = \frac{F+F'}{2}$$

مختصات نقاط مهم در بیضی قائم

$$O\begin{vmatrix}\alpha\\ \beta\end{matrix}\quad A\begin{vmatrix}\alpha\\ \beta+a\end{matrix}\quad A'\begin{vmatrix}\alpha\\ \beta-a\end{matrix}\quad F\begin{vmatrix}\alpha\\ \beta+c\end{matrix}\quad F'\begin{vmatrix}\alpha\\ \beta-c\end{matrix}\quad B\begin{vmatrix}\alpha+b\\ \beta\end{matrix}\quad B'\begin{vmatrix}\alpha-b\\ \beta\end{matrix}$$

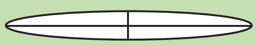
و

$$O\begin{vmatrix}\alpha = \dfrac{x_A + x_{A'}}{2} = \dfrac{x_B + x_{B'}}{2} = \dfrac{x_F + x_{F'}}{2}\\[2mm] \beta = \dfrac{y_A + y_{A'}}{2} = \dfrac{y_B + y_{B'}}{2} = \dfrac{y_F + y_{F'}}{2}\end{matrix}$$

خروج از مرکز : در هر بیضی نسبت $e = \frac{c}{a}$ را خروج از مرکز بیضی می گویند .

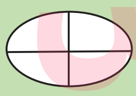
$$0 < FF' < MF + MF' \Rightarrow 0 < 2c < 2a \Rightarrow 0 < \frac{c}{a} = e < 1$$

if $e \to 1$



خروج از مرکز چاقی و لاغری بیضی را نشان می دهد هرچه کمتر چاق تر

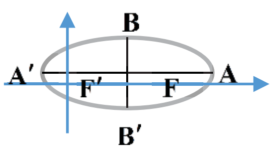
if $e \to 0$



۱۲۶) کانون های یک بیضی $F(14,2)$, $F'(2,2)$ هستند و خروج از مرکز آن $\frac{3}{5}$ است . B, B', A, A' را تعیین کنید و نمودار آن را رسم کنید .

$$O = \frac{F+F'}{2} \Rightarrow O\begin{vmatrix}\alpha = \dfrac{2+14}{2} = 8\\[2mm] \beta = \dfrac{2+2}{2} = 2\end{matrix} \quad , \quad 2c = |FF'| = \sqrt{(14-2)^2 + (2-2)^2} = 12 \Rightarrow c = 6 \quad , \quad e = \frac{c}{a} \Rightarrow \frac{3}{5} = \frac{6}{a} \Rightarrow a = 10$$

$$b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{100 - 36} = 8 \quad \Rightarrow A\begin{vmatrix}8+10 = 18\\ 2\end{matrix} \quad A'\begin{vmatrix}8-10 = -2\\ 2\end{matrix} \quad B\begin{vmatrix}8\\ 2+8 = 10\end{matrix} \quad B\begin{vmatrix}8\\ 2-8 = -6\end{matrix}$$



۱۲۷) اگردر یک بیضی داشته باشیم $B(1,4)$, $F(5,2)$, $F'(-3,2)$ آنگاه خروج از مرکز بیضی را به دست آورید .

$$O = \frac{F+F'}{2} \Rightarrow O\begin{vmatrix}\alpha = \dfrac{-3+5}{2} = 1\\[2mm] \beta = \dfrac{2+2}{2} = 2\end{matrix} \quad , \quad \begin{cases} 2c = |FF'| = 5-(-3) = 8 \Rightarrow c = 4 \\ B(\alpha, \beta+b) = (1,4) \Rightarrow 2+b = 4 \Rightarrow b = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \sqrt{b^2+c^2} = \sqrt{4+16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5} \\ e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{4}{2\sqrt{5}} = \dfrac{2}{\sqrt{5}} \end{cases}$$

دایره

معادله استاندارد دایره : معادله دایره ای به مرکز $O(\alpha,\beta)$ و شعاع R به صورت : $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=R^2$ است .

معادله فرم گسترده دایره : اگر معادله فرم استاندارد دایره را بسط دهیم و مرتب بنویسیم فرم گسترده معادله دایره را خواهیم داشت .
$x^2+y^2+ax+by+c=0$ در این حالت داریم :

$$\begin{cases} a=-2\alpha \\ b=-2\beta \\ c=\alpha^2+\beta^2-R^2 \end{cases} \Rightarrow O\begin{cases}\alpha=\dfrac{-a}{2} \\ \beta=\dfrac{-b}{2}\end{cases} \quad , \quad R=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2-4c}=\sqrt{\alpha^2+\beta^2-c}$$

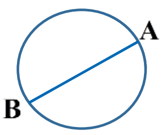
۱) در فرم گسترده باید ضرائب x^2 , y^2 برابر باشند و همواره باید : $a^2+b^2-4c>0$

۲) برای نوشتن معادله دایره داشتن مختصات مرکز و شعاع دایره الزامی است مگر آنکه در مسئله اطلاعاتی بدهند که بتوان آنها را محاسبه کرد .

۳) در نوشتن و حل مسائل دایره از رسم کردن غافل نشوید به خصوص هنگامی که ایده خاصی ندارید و چیزی به ذهنتان نمی رسد پیاده کردن داده های مسئله روی شکل راه حل را به ذهن ما القاء می کند .

۴) در بعضی از سوالات میگه مرکز دایره روی خط $y=mx+n$ قرار داره ویا میگه $y=mx+n$ معادله یک قطر دایره است . در این سوالات مرکز را به صورت $O\begin{cases}\alpha \\ \beta=m\alpha+n\end{cases}$ نشان دهید .

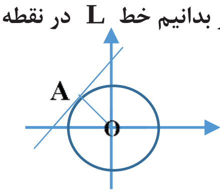
۱۲۸) معادله دایره ای را بنویسید که نقاط $B(-2,2)$, $A(2,4)$ دو سر یک قطر آن باشند .



$$O=\frac{A+B}{2} \Rightarrow O\begin{cases}\alpha=\dfrac{-2+2}{2}=0 \\ \beta=\dfrac{2+4}{2}=3\end{cases} \Rightarrow R=\frac{1}{2}|AB|=\frac{1}{2}\sqrt{(2+2)^2+(4-2)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{20}=\sqrt{5}$$

$$(x-0)^2+(y-3)^2=5$$

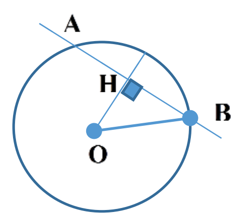
۱۲۹) اگر بدانیم خط L در نقطه $(-3,4)$ بر دایره ای به مرکز مبداء مختصات مماس است . معادله خط مماس را بنویسید .



$$M_{OA}=\frac{4}{-3} \Rightarrow M'=\frac{3}{4} \Rightarrow L_A:\ y-4=\frac{3}{4}(x+3)$$

۱۳۰) دایره ای به مرکز $O(1,-1)$ خط $\frac{3}{2}x-2y+4=0$ را در دو نقطه قطع می کندو طول وتر ایجاد شده ۸ است معادله این دایره را بنویسید .

خطی که از مرکز دایره بر وتر وارد و بر آن عمود باشد آن را نصف می کند.



$$OH=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{\left|\frac{3}{2}+2+4\right|}{\sqrt{\frac{9}{4}+4}}=\frac{7/5}{\frac{5}{2}} \Rightarrow OH=\frac{15}{5}=3$$

$$R^2=OH^2+(4)^2=9+16=25 \Rightarrow R=5 \Rightarrow (x-1)^2+(y+1)^2=25$$

وضعیت دو دایره

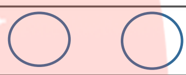
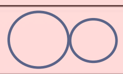
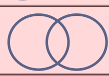
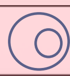
روش حل مسئله

۱- مختصات مراکز دو دایره و همچنین شعاع هریک را به تعیین کنید .

۲- فاصله دو مرکز دایره یعنی $d=|O_۱O_۲|$ را حساب کنید .

۳- $R_۱+R_۲$, $|R_۱-R_۲|$ را محاسبه کنید .

۴ - d را با $R_۱+R_۲$, $|R_۱-R_۲|$ مقایسه کنید .

$d>R_۱+R_۲$	متخارج	
$d=R_۱+R_۲$	مماس خارج	
$\|R_۱-R_۲\|<d<R_۱+R_۲$	متقاطع	
$d=\|R_۱-R_۲\|$	مماس داخل	
$d<\|R_۲-R_۱\|$	متداخل	
$d=۰$	هم مرکز	

۱۳۱) دو دایره به معادلات : $\begin{cases} x^۲+y^۲-۴x+۸y+۱۹=۰ \\ x^۲+y^۲-۴x+۴y-۱=۰ \end{cases}$ نسبت به هم چگونه اند ؟

$$۱)\quad O_۱(۲,-۴)\quad,\quad R_۱=\frac{۱}{۲}\sqrt{۱۶+۶۴-۷۶}=۱$$

$$۲)\quad O_۲(۲,-۲)\quad,\quad R_۲=\frac{۱}{۲}\sqrt{۱۶+۱۶+۴}=۳\quad,\quad \begin{cases} R_۱+R_۲=۴ \\ |R_۱-R_۲|=۲ \end{cases} \Rightarrow d=|R_۱-R_۲|=۲$$

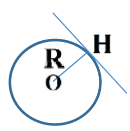
مماس داخل اند

$$۳)\quad d=|O_۱O_۲|=\sqrt{(۲-۲)^۲+(-۲+۴)^۲}=۲$$

۱۳۲) وضعیت خط به معادله $۳x+۴y+۷=۰$ نسبت به دایره $x^۲+y^۲-۲x-۳=۰$ چگونه است .

$$O\Big|^{۱}_{۰}\quad,\quad R=\frac{۱}{۲}\sqrt{۴+۱۲}=۲\quad,\quad OH=\frac{|۳+۷|}{\sqrt{۹+۱۶}}=\frac{۱۰}{۵}=۲\ \Rightarrow\ OH=R$$

خط و دایره بر هم مماس اند



۱۳۳) وضعیت دو دایره $(x-۱)^۲+(y-۱)^۲=۴$, $x^۲+y^۲-۲x-۸y+۱۳=۰$ نسبت به هم را تعیین کنید .

$$o_۱\Big|^{۱}_{۱}\quad,\quad R_۱=۲\quad,\quad o_۲\Big|^{۱}_{۴}\quad,\quad R_۲=\frac{۱}{۲}\sqrt{۴+۶۴-۵۲}=\frac{۱}{۲}\sqrt{۱۶}=۲$$

$$d=|o_۱o_۲|=|۴-۱|=۳\quad,\quad R_۱+R_۲=۲+۲=۴\quad,\quad |R_۱-R_۲|=۰\qquad |R_۱-R_۲|<o_۱o_۲=d<R_۱+R_۲$$

دو دایره متقاطع اند .

فصل ۷ احتمال

یاد آوری

دو پیشامد
- **سازگارند**
  - مستقل: $P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$ ، $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A)\times P(B)$
  - نامستقل: $P(A\cap B)\neq P(A)\times P(B)$ ، $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$
- **ناسازگارند**
  - $A\cap B=\phi$: $P(A\cap B)=۰$ ، $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$

۱۳۴) در جعبه‌ای ۶ لامپ سالم و ۴ لامپ معیوب وجود دارد. ۳ لامپ به تصادف و هم زمان خارج می‌کنیم، احتمال آن‌که لامپ‌ها از یک نوع باشند را بیابید.

☑ *پاسخ:*

$$n(S)=\binom{۱۰}{۳}=۱۲۰$$

$$n(A)=\binom{۴}{۳}\binom{۶}{۰}+\binom{۶}{۳}\binom{۴}{۰}=۴+۲۰=۲۴ \quad\Rightarrow\quad P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۲۴}{۱۲۰}=\frac{۸}{۳۰}$$

۱۳۵) دو مهره متوالیاً و بدون جایگذاری خارج می کنیم احتمال ان که یکی سفید و دیگری قرمز باشد چقدر است؟

☑ *پاسخ:*

چون گفته متوالی و بدون جایگذاری از روش ضرب تناسب‌ها میریم.

$$P(D)=\overbrace{\frac{۳}{۱۴}\times\frac{۵}{۱۳}}^{\text{اولی سفید دومی قرمز}}+\underbrace{\frac{۵}{۱۴}\times\frac{۳}{۱۳}}_{\text{اولی قرمز دومی سفید}}$$

۱۳۶) احتمال قبولی کنکور نفر اول $\frac{۲}{۵}$ و احتمال قبولی نفر دوم $\frac{۳}{۷}$ است.

الف) احتمال اینکه فقط نفر دوم در کنکور قبول شود.

ب) احتمال اینکه هیچکدام قبول نشوند را بدست آورید.

☑ *پاسخ:*

قبولی نفر اول ربطی به قبولی نفر دوم ندارد یعنی مستقل‌اند، هم چنین متمم این پیشامدها نیز مستقل‌اند

الف) $P(\text{فقط نفر دوم قبول شود})=P(\text{اولی قبول نشود و دومی قبول شود})=P(A')\times P(B)=(۱-\frac{۲}{۵})\times\frac{۳}{۷}=\frac{۹}{۳۵}$

ب) $P(\text{هیچکدام قبول نشوند})=P(A'\cap B')=P(A')\times P(B')=(۱-\frac{۳}{۷})(۱-\frac{۲}{۵})=\frac{۱۲}{۳۵}$

۱۳۷) احتمال آن‌که شخص A تا ۲۰ سال دیگر ناراحتی قلبی پیدا کند ۰/۸ و احتمال آن‌که شخص B تا ۲۰ سال دیگر ناراحتی قلبی پیدا کند ۰/۶است، چقدر احتمال دارد:

الف) هر دو تا ۲۰ سال دیگر ناراحتی قلبی پیدا کنند.

ب) حداقل یکی از آنها تا ۲۰ سال دیگر ناراحتی قلبی پیدا کند.

☑ *پاسخ:*

بیماری شخص A ربطی به بیماری شخص B ندارد یعنی از هم مستقل‌اند. هر دوی آن‌ها بعد از ۲۰ سال ناراحتی قلبی بگیرند یعنی اشتراک، حداقل یکی از آن‌ها ناراحتی بگیرد یعنی اجتماع.

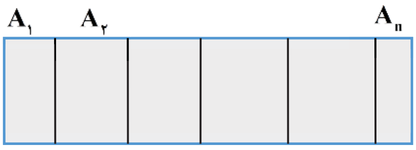
الف) $P(A\cap B)=P(A)\times P(B)=\frac{۸}{۱۰}\times\frac{۶}{۱۰}=\frac{۴۸}{۱۰۰}$

ب) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=P(A)+P(B)-P(A)\times P(B)=\frac{۸}{۱۰}+\frac{۶}{۱۰}-(\frac{۸}{۱۰}\times\frac{۶}{۱۰})=\frac{۹۲}{۱۰۰}$

فرمول احتمال کل یا قانون جمع احتمال ها

اگر فضای نمونه ای S به پیشامد های $A_۱, A_۲ ......, A_{n-۱}, A_n$ افراز شده باشد . یعنی :

$$A_i \cap A_j = \phi$$
$$A_۱ \cup A_۲ \cup .... A_n = S$$

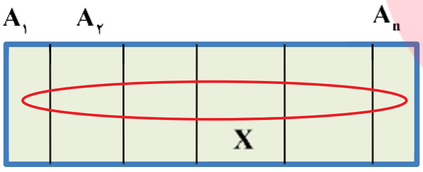


قانون جمع احتمال‌ها

در بعضی از مسایل احتمال، فضای نمونه ای به چند قسمت تقسیم می‌شوند. مثلاً مردان و زنان – ظرف‌ها و کیسه‌ها و....

فرض کنید $A_۱, A_۲, ..., A_n$ پیشامد هائی از فضای نمونه ای S باشند به طوری که $A_۱ \cup A_۲ \cup .... \cup A_n = S$ و این پیشامدها دو به دو ناسازگار باشند یعنی اشتراک نداشته باشند . و اگر X یک پیشامد دلخواه از S باشد در این صورت داریم از قانون جمع احتمال استفاده می شود . البته هنگامی که پیشامدی مانند X با چندین پیشامد دیگر مانند : $A_۱, A_۲ ,...., A_n$ ((که فضای نمونه را افراز نموده اند)) اشتراک داشته باشد .

$$P(X) = p(A_۱)p(x|A_۱) + p(A_۲)p(x|A_۲) + ... + p(A_n)p(x|A_n) = \sum_{i=۱}^{n} P(A_i)P(X|A_i)$$



اگر فضای نمونه ای چند قسمتی باشه ، مثل زنان و مردان ، ظرف ها و کیسه های مختلف ، شهری و روستایی و کارخانه هاو دستگاه های مختلف ، حالت های متفاوت و ...... احتمال یه پیشامد مثل x در این فضا بخواهد از فرمول بالا به دست استفاده می کنیم

برای حل این مسایل می توانیم از نمودار درختی استفاده کنیم به طوری که اعداد موجود در هر شاخه از درخت را در هم ضرب نموده و اگر از شاخه‌ای به شاخه‌ی دیگر برویم اعداد آن‌ها را با هم جمع می‌کنیم.

۱۳۸) ۶۰ درصد جمعیت کشوری را مردان که ۷۰ درصد آن ها با سوادند و بقیه جمعیت زنان ، با ۶۰ درصد سواد می باشند ، چند در صد این جمعیت باسواد هستند ؟

☑پاسخ:

$$P(B) = P(A_۱)P(B|A_۱) + P(A_۲)P(B|A_۲)$$
$$P(B) = \frac{۶۰}{۱۰۰} \times \frac{۷۰}{۱۰۰} + \frac{۴۰}{۱۰۰} \times \frac{۶۰}{۱۰۰} = \frac{۶۶}{۱۰۰}$$

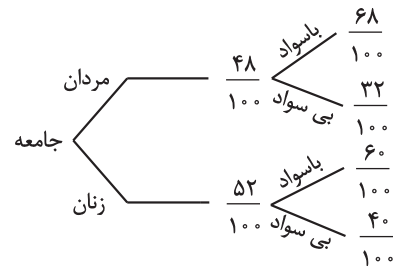
۱۳۹) طبق تحقیقات پزشکی احتمال تولد غیر طبیعی برای پسر $\frac{۲۱}{۱۰۰}$ و برای دختر $\frac{۱۸}{۱۰۰}$ است احتمال این که فرزند یک خانواده غیر طبیعی به دنیا بیاید چقدر ا ست ؟

☑پاسخ: اگر A پیشامد غیر طبیعی به دنیا آمدن فرزند ، $A_۱$ پیشامد پسر بودن و $A_۲$ پیشامد دختر بودن باشد ، داریم :

$$P(A) = P(A_۱)P(A|A_۱) + P(A_۲)P(A|A_۲) = \frac{۱}{۲} \times \frac{۲۱}{۱۰۰} + \frac{۱}{۲} \times \frac{۱۸}{۱۰۰} = \frac{۳۹}{۲۰۰}$$

۱۴۰) ۵۲ ٪ جمعیت کشور را زنان و ۴۸ ٪ دیگر را مردان تشکیل می دهند اگر ۶۰ ٪ زنان و ۶۸ ٪ از مردان با سواد باشند چند درصد از افراد جامعه باسوادند؟

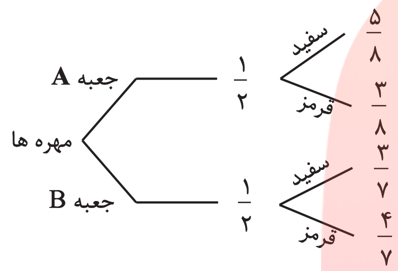
☑پاسخ:



$$P=\frac{۴۸}{۱۰۰}\times\frac{۶۸}{۱۰۰}+\frac{۵۲}{۱۰۰}\times\frac{۶۰}{۱۰۰}$$

۱۴۱) در جعبه A ، ۵ مهره سفید و ۳ مهره قرمز و در جعبه B ، ۳ مهره سفید و ۴ مهره قرمز وجود دارد. یکی از این دو جعبه را به تصادف انتخاب و از ان یک مهره خارج می‌کنیم چقدر احتمال دارد این مهره سفید باشد؟

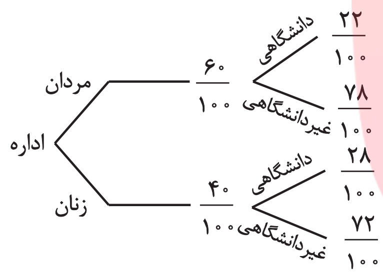
☑پاسخ:



$$P(\text{سفید بودن})=\frac{۱}{۲}\times\frac{۵}{۸}+\frac{۱}{۲}\times\frac{۳}{۷}$$

۱۴۲) در اداره‌ای ۶۰ ٪ کارمندان مرد، و ۲۲٪ آن ها تحصیلات دانشگاهی دارند. ۲۸ ٪ زنان این اداره نیز تحصیلات دانشگاهی دارند. اگر یک نفر از میان آن‌ها انتخاب شود چقدر احتمال دارد تحصیلات دانشگاهی نداشته باشد؟

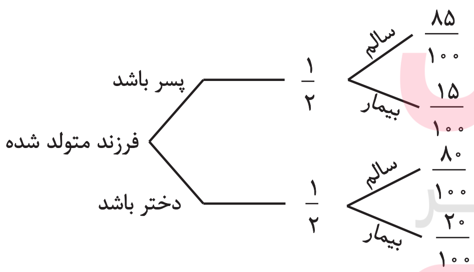
☑پاسخ:



$$P=\frac{۶}{۱۰}\times\frac{۷۸}{۱۰۰}+\frac{۴}{۱۰}\times\frac{۷۲}{۱۰۰}$$

۱۴۳) انتقال نوعی بیماری ارثی از پدر مادر به فرزند پسر ۱۵ ٪ و به فرزند دختر ۲۰ ٪ است. والدینی که حامل این نوع بیماری‌اند انتظار فرزندی را دارند. احتمال آن‌که این فرزند سالم به دنیا بیاید را حساب کنید.

☑پاسخ:



$$P(\text{فرزند سالم})=\frac{۱}{۲}\times\frac{۸۵}{۱۰۰}+\frac{۱}{۲}\times\frac{۸۰}{۱۰۰}$$

۱۴۴) در جعبه A، ۲ مهره سفید ۳ مهره سیاه و در جعبه B، ۳ مهره سفید و ۴ مهره سیاه قرار دارد. از هر یک از این دو جعبه ۱ مهره خارج می‌کنیم. احتمال اینکه دو مهره هم رنگ باشند کدام است؟

☑پاسخ:

$$P(\text{دو مهره هم رنگ})=P(\text{هر دو مهره سفید})+P(\text{هر دو سیاه})$$

$$P(\text{دو مهره هم رنگ})=\frac{۲}{۵}\times\frac{۳}{۷}+\frac{۳}{۵}\times\frac{۴}{۷}=\frac{۱۸}{۳۵}$$

نکته

هر وقت در انتخاب‌های متوالی یکی از انتخاب‌ها مورد پرسش قرار نگیره یعنی از نتیجه‌ی یک آزمایش چیزی نگویند ما باید خودمون حالت‌های ممکن رو برای اون در نظر بگیریم یا این‌که فکر کنیم اصلاً اون آزمایش رخ نداده و احتمال موارد گفته شده رو حساب کنیم.

۱۴۵) در آزمایشگاهی ۵ موش سفید و ۳ موش سیاه نگهداری می شود با تصادف سه موش از بین آن ها انتخاب می شود . با کدام احتمال ، اولین موش سفید و سومین موش سیاه است؟ (سراسری تجربی ۸۸)

☑پاسخ:

چون از رنگ موش دوم حرفی نزده یا حالت‌های ممکن برای اون رو حساب می‌کنیم مثل راه حل اول و یا مثل راه حل دوم انگار اتفاقی نیفتاده. احتمال‌های اول و سوم را حساب می‌کنیم و در هم ضرب می‌کنیم.

$$P_1 = \frac{۵}{۸}\times\frac{۴}{۷}\times\frac{۳}{۶}+\frac{۵}{۸}\times\frac{۳}{۷}\times\frac{۲}{۶} \text{ : (راه اول)}$$

$$P_2 = \frac{۵}{۸}\times\frac{۳}{۷}=\frac{۱۵}{۵۶} \text{ : (راه دوم)}$$

۱۴۶) در جعبه‌ای ۶ مهره سفید و ۹ مهره سیاه موجود است. دو مهره متوالیاً و بدون جایگذاری از آن بیرون می‌آوریم. با کدام احتمال بدون توجه به اولین مهره دومین مهره خارج شده سفید است؟ (سراسری تجربی ۹۲)

☑پاسخ:

$$P(A) = \frac{۶}{۱۵}\times\frac{۵}{۱۴}+\frac{۹}{۱۵}\times\frac{۶}{۱۴}=\frac{۸۴}{۱۵\times۱۴}=\frac{۲}{۵} \text{ : (راه اول)}$$

$$P(A) = \frac{۶}{۱۵}=\frac{۲}{۵} \text{ : (راه دوم)}$$

بدون در نظر گرفتن مهره اول فقط احتمال سفید بودن مهره دوم را حساب می‌کنیم. میبینی که جواب یکیه.

۱۴۷) دو مهره متوالیاً و بدون جایگذاری خارج می کنیم احتمال ان که یکی سفید و دیگری قرمز باشد چقدر است؟

☑پاسخ:

چون گفته متوالی و بدون جایگذاری از روش ضرب تناسب‌ها میریم.

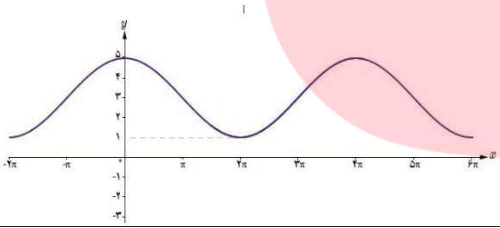
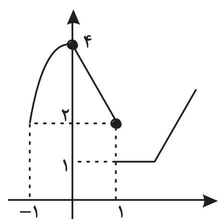
$$P(D) = \underbrace{\frac{۳}{۱۴}\times\frac{۵}{۱۳}}_{\text{اولی سفید دومی قرمز}}+\underbrace{\frac{۵}{۱۴}\times\frac{۳}{۱۳}}_{\text{اولی قرمز دومی سفید}}$$

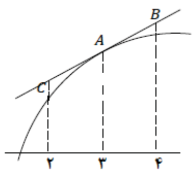
۱۴۸) در کیسه ای ۶ مهره آبی و ۴ مهره قرمز وجود دارد اگر در سه اقدام به برداشتن مهره از کیسه کنیم به طوریکه در مرحله اول ۲ مهره در مرحله دوم ۳ مهره و در مرحله سوم ۵ مهره برداریم با کدام احتمال همه مهره های قرمز در مرحله سوم از کیسه خارج می شوند ؟

☑پاسخ:

$$P = \underbrace{\frac{\binom{۶}{۲}}{\binom{۱۰}{۲}}}_{\text{در مرحله اول هر دو سفید بیاد}}\times\underbrace{\frac{\binom{۴}{۳}}{\binom{۸}{۳}}}_{\text{در مرحله دوم هر سه سفید بیاد}}\times\underbrace{\frac{\binom{۴}{۴}\binom{۱}{۱}}{\binom{۵}{۵}}}_{\text{در مرحله سوم چهار تا قرمز و یک مهره سفید بیاد}}=\frac{۱۵}{۴۵}\times\frac{۴}{۵۶}\times۱=\frac{۱}{۴۲}$$

سوالات امتحان درس: ریاضی ۳ سال دوازدهم	رشته: تجربی	تعداد صفحه:۲	مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه
نام و نام خانوادگی:	دوره دوم متوسطه	تاریخ امتحان:	ساعت شروع:
دانش آموزان سراسر کشور	آزمون اول : مطابق با امتحانات ترم اول @kimia – mahan		

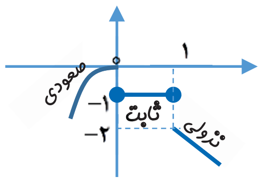
ردیف	سوالات	نمره
۱	نمودار تابع زیر را رسم ، سپس بازه‌هایی را که در آن تابع صعودی اکید، نزولی اکید یا ثابت است را مشخص کنید. $f(x)=\begin{cases}-x^2 & x<0\\ -1 & 0\le x\le 1\\ -3x+1 & x>1\end{cases}$	۱/۲۵
۲	توابع $f(x)=\sqrt{\dfrac{3x-2}{1-x}}$, $g(x)=2x$ مفروض‌اند. دامنه و ضابطه ی تابع $fog(x)$ را محاسبه کنید.	۱
۳	تابع $f(x)=-(x+1)^3+1$ را در نظر بگیرید و موارد زیر را کاملاً توضیح داده و انجام دهید . الف) نمودار $f(x)$ را به کمک $y=x^3$ رسم کنید . مراحل را توضیح دهید . ب) نشان دهید $f(x)$ وارون پذیر است و ضابطه ی $f^{-1}(x)$ را به دست آورید .	۲/۵
٤	اگر $f=\{(1,2),(3,4),(0,1)\}$, $g=\{(1,5),(0,0),(-2,1),(3,3)\}$ آنگاه : الف) تابع fog را تعیین کنید . ب) دامنه gof را به دست آورید .	۱
٥	دامنه تابع $y=\tan\dfrac{x}{2}$ را تعیین کنید و نمودار آن را در بازه $[-\pi,\pi]$ رسم کنید .	۱/۵
٦	با دقت درنمودار داده شده تابع مربوط با ضابطه $f(x)=a\sin bx+c$ یا $f(x)=a\cos bx+c$ می باشد . با تشخیص مقادیر ماکزیمم و مینیمم و دوره تناوب ضابطه ی آن را تعیین کنید . 	۱/۵
۷	جواب های عمومی معادله مثلثاتی $\sin x-\cos 2x=0$ را تعیین کنید .	۱/۵
۸	$\cos 15^\circ$ را تعیین کنید .	۱
۹	با استفاده از شکل حدهای زیر را در صورت وجود به دست آورید. $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$ $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$ $\lim\limits_{x\to 0} f(x)+\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)$ 	۱
۱۰	حدود زیر را تعیین کنید . ۱) $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}} \dfrac{2x^2-x}{4x^2-1}$ ۲) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \tan 2x$ ۳) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-\sqrt{2x-1}}{x^2-x}$ ۴) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{2x^2-3x+2}{x^2+5x+1}$	۲
۱۱	درستی و نادرستی موارد زیر را تعیین کنید . الف) تابع $y=\left(\dfrac{1}{3}\right)^x$ همواره تابعی صعودی است . ب) تابع $y=\log_{0/4}^{x}$ همواره تابعی نزولی است. پ) در تابع $f(kx)$ اگر $0<k<1$ باشد می‌گوییم نمودار تابع $f(x)$ انبساط افقی یافته است.	۰/۷۵

۱۲	معادله خط مماس بر منحنی $f(x)=-x^2+10x$ را در نقطه ی $A\Big\|_{f(2)}^{2}$ واقع بر نمودار آن را بنویسید .	۱/۵
۱۳	برای تابع $f(x)$ در شکل زیر داریم: $f'(3)=\frac{5}{3}$ و $f(3)=15$. با توجه به شکل مختصات A و B و C را بیابید .  	۱/۵
۱۴	جاهای خالی را با عبارات مناسب پر کنید . الف) تابع $f(x)=\log_{0/5} 2^x$ صعودی .... ب) مجموعه $(\frac{5}{2},4)-\{3\}$ یک .... نقطه $x=3$ می باشد . ج) برای رسم تابع $f(kx)$ کافی است طول نقاط نمودار تابع $f(x)$ را در .... ضرب کنیم . د) در بازه $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$ نامساوی $\tan\alpha > \sin\alpha$ .... است .	۱
۱۵	۱) اگر $\cos x=\frac{5}{13}$ باشد ، $\cos 2x$ کدام است ؟ ۱) $\frac{119}{169}$ ۲) $\frac{-119}{169}$ ۳) $\frac{119}{144}$ ۴) $\frac{-119}{144}$ ۲) حاصل $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3-\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x}-6}$ کدام است ؟ ۱) $+\infty$ ۲) $-\infty$ ۳) $\frac{-1}{2}$ ۴) -2 ۳) کدام تابع زیر اکیداً نزولی است ؟ ۱) $f(x)=\|x\|$ ۲) $f(x)=x\|x\|$ ۳) $f(x)=x+\|x\|$ ۴) $f(x)=\sqrt{-x}$ ۴) در تابع $f(x)=x^2-2[x]$ حاصل $f\left(\frac{-1}{2}f(\sqrt{3})\right)$ کدام است ؟ ۱) $\frac{9}{4}$ ۲) $\frac{-7}{4}$ ۳) $\frac{7}{4}$ ۴) $\frac{1}{4}$	۱
	جمع بارم موفق باشید	۲۰

ردیف	پاسخ نامه تشریحی آزمون اول	نمره

۱

در بازه ی $(-\infty,0)$ صعودیه . در بازه $[0,1]$ ثابته و در بازه ی $(1,+\infty)$ نزولیه .

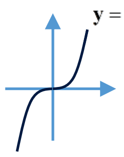


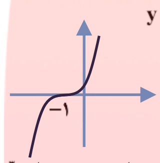
۲

$$D_f=\left\{x\left|\frac{3x-2}{1-x}\geq 0\right.\right\}=\left[\frac{2}{3},1\right) \quad , \quad D_g=R \qquad D_{fog}=\left\{x\in Dg\left|g(x)\in D_f\right.\right\}=\left\{x\in R\left|\frac{2}{3}\leq 2x<1\right.\right\}=\left[\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right)$$

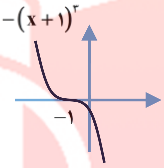
x		$\frac{2}{3}$		۱	
$\frac{3x-2}{1-x}$	−	۰	+	ت ن	−

۳

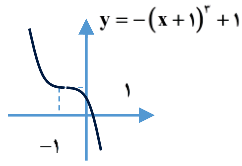




انتقال ۱ واحدی نمودار $y=x^3$ به سمت راست



قرینه نسبت به محور x ها



انتقال ۱ واحدی نمودار در امتداد محور y ها

$$f(x_1)=f(x_2)\to x_1=x_2 \Rightarrow -(x_1+1)^3+1=-(x_2+1)^3+1 \to (x_1+1)^3=(x_2+1)^3 \Rightarrow x_1+1=x_2+1$$
$$x_1=x_2$$
$$y=-(x+1)^3+1 \to (x+1)^3=(1-y) \longrightarrow x+1=\sqrt[3]{1-y} \to x=\sqrt[3]{1-y}-1 \to f^{-1}(x)=\sqrt[3]{1-x}-1$$

۴

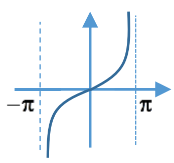
الف)
$$\begin{cases} 1\xrightarrow{g}5\xrightarrow{f}\times \\ 0\xrightarrow{g}0\xrightarrow{f}1 \\ -2\xrightarrow{g}1\xrightarrow{f}2 \\ 3\xrightarrow{g}3\xrightarrow{f}4 \end{cases} \Rightarrow fog=\{(0,1),(-2,2),(3,4)\}$$

ب)
$$\begin{cases} 1\xrightarrow{f}2\xrightarrow{g}\times \\ 3\xrightarrow{f}4\xrightarrow{g}\times \\ 0\xrightarrow{f}1\xrightarrow{g}5 \end{cases} \Rightarrow D_{gof}=\{0\}$$

۵

$$y=\tan\frac{x}{2}=\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}} \quad , \quad \cos\frac{x}{2}=0=\cos 2k\pi\pm\frac{\pi}{2} \quad , \quad x=4k\pi\pm\pi$$
$$D_f=R-(4k\pi\pm\pi)$$

تابع $\tan\frac{x}{2}$ یک تابع کسریه باید ریشه های مخرج اونو حساب کنیم



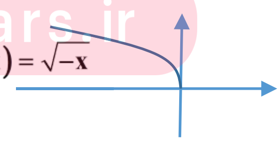
۶

با توجه به شکل ، نمودار تابع به فرم کسینوس است .

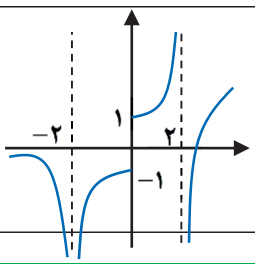
$$f(x)=a\cos bx+c \quad \Rightarrow \quad \max=5 \quad , \quad \min=1 \quad , \quad T=4\pi=\frac{2\pi}{|b|}$$
$$|a|=\frac{y_{max}-y_{min}}{2}=\frac{5-1}{2}=2 \ , \ c=\frac{y_{max}+y_{min}}{2}=3 \ , \ |b|=\frac{1}{2} \Rightarrow a=2 \ , \ b=\pm\frac{1}{2} \Rightarrow y=2\cos\left(\pm\frac{x}{2}\right)+3$$

۷

$$\cos 2x=\sin x \Rightarrow 1-2\sin^2 x-\sin x=-2\sin x-\sin x+1=0 \Rightarrow \begin{cases} \sin x=-1 \Rightarrow x=2k\pi-\frac{\pi}{2} \\ \sin x=\frac{1}{2} \Rightarrow x=2k\pi+\frac{\pi}{6} \ , \ x=2k\pi+\pi-\frac{\pi}{6} \end{cases}$$

۸	$\begin{cases}\cos 15 = \cos x \\ \cos 30 = \cos 2x\end{cases} \Rightarrow 1+\cos 2x = 2\cos^2 x \Rightarrow 2\cos^2 x = 1+\cos 2x \Rightarrow \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$ $\cos x = \sqrt{\frac{1+\cos 2x}{2}} \Rightarrow \cos 15 = \sqrt{\frac{1+(\frac{\sqrt{3}}{2})}{2}} = \sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{4}}$	
۹	$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = 1$ $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = 2$ $\lim\limits_{x\to 0} f(x) + \lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = 4+2 = 6$	
۱۰	$1)\ \lim\limits_{x\to \frac{1}{2}} \frac{2x^2-x}{4x^2-1} = \lim\limits_{x\to \frac{1}{2}} \frac{x\cancel{(2x-1)}}{\cancel{(2x-1)}(2x+1)} = \frac{\frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{4}$ $2)\ \lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \tan 2x = \begin{cases} \lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}^+} \tan 2x = \lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}^+} \frac{\sin 2x}{\cos 2x} = \frac{1}{0^-} = -\infty \\ \lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}^-} \tan 2x = \lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}^-} \frac{\sin 2x}{\cos 2x} = \frac{1}{0^+} = +\infty \end{cases}$ $3)\ \lim\limits_{x\to 1} \frac{x-\sqrt{2x-1}}{x^2-x} \times \frac{x+\sqrt{2x-1}}{x+\sqrt{2x-1}} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2-2x+1 = \cancel{(x-1)}^2 = (x-1)}{x\cancel{(x-1)}(x+\sqrt{2x-1})} = 0$ $4)\ \lim\limits_{x\to -\infty} \frac{2x^2-3x+2}{x^2+5x+1} = \lim\limits_{x\to -\infty} \frac{2x^2}{x^2} = 2$	
۱۱	الف) نادرست ب) درست ج) درست	
۱۲	$A\left\|\begin{matrix}2\\ f(2)=16\end{matrix}\right. \Rightarrow f'(x) = -2x+10 \to f'(2) = 6 \Rightarrow y-16 = 6(x-2)$	
۱۳	$M(L_{CAB}) = f'(3) = \frac{5}{3} \Rightarrow y-15 = \frac{5}{3}(x-3) \Rightarrow y = \frac{5}{3}x+10$ $y_C = \frac{5}{3}(2)+10 = \frac{40}{3}$, $y_B = \frac{5}{3}(4)+10 = \frac{50}{3}$ $A\left\|\begin{matrix}3\\15\end{matrix}\right.$ $B\left\|\begin{matrix}4\\ \frac{50}{3}\end{matrix}\right.$ $C\left\|\begin{matrix}2\\ \frac{40}{3}\end{matrix}\right.$	
۱۴	الف) نیست ب) همسایگی محذوف ج) $\frac{1}{k}$ د) نادرست	
۱۵	۱) گزینه ۲ ۲) گزینه ۳ ۳) گزینه ۴ ۴) گزینه ۱ $1)\ \cos 2x = 2\cos^2 x - 1 = 2\left(\frac{5}{13}\right)^2 - 1 = \frac{50}{169} - 1 = \frac{-119}{169}$ $2)\ \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{3-\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x}-6} = \frac{3-\frac{1}{\infty}}{\frac{1}{\infty}-6} = \frac{3-0}{0-6} = \frac{-1}{2}$ $3) f(x) = \sqrt{-x}$  $4)\ f(x) = x^2 - 2[x] \Rightarrow f(\sqrt{3}) = (\sqrt{3})^2 - 2[\sqrt{3}] = 3-2 = 1$ $f\left(\frac{-1}{2} f(\sqrt{3})\right) = f\left(\frac{-1}{2}(1)\right) = \left(\frac{-1}{2}\right)^2 - 2\left[\frac{-1}{2}\right] = \frac{1}{4} + 2 = \frac{9}{4}$	
	موفق باشید جمع بارم	۲۰

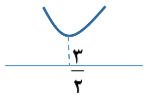
سوالات امتحان درس:	رشته: تجربی	تعداد صفحه:۱	مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه
نام و نام خانوادگی:	دوره دوم متوسطه	تاریخ امتحان:	ساعت شروع:
دانش آموزان کشور سال ۱۳۹۸	آزمون ۲ : مطابق با امتحانات ترم اول	@kimia-mahan	

ردیف	سوالات	نمره
۱	درستی یا نادرستی عبارت های زیر را تعیین کنید ؟ الف) تابع $f(x)=-x^۲+۳x$ روی بازه ی $(-\infty,۳]$ اکیداً صعودی است . ب) تابع $y=x^۲-۱$ روی بازه ی $[۰,۱]$ بالاتر از تابع $y=x^۳-۱$ قرار دارد . ج) باقیمانده ی تقسیم $f(x)=۲x^۵-۳x^۳-۲x+۴$ بر $x+۱$ برابرصفر است. د) تابع $\tan x$ در هربازه ای که در آن تعریف شده باشد صعودی است .	۱
۲	اگر نقطهی $A\begin{vmatrix}-۵\\۳\end{vmatrix}$ نقطهای روی نمودار تابع $y=f(x)$ باشد، نقطهی A' نظیر آن روی تابع $g(x)=۳f(x-۲)+۱$ میباشد. مختصات A' را به دست آورید.	۱
۳	الف) تابع f در $\mathbb{R}$ نزولی است و $f(۳x-۱)<f(۲-x)$ حدود x را تعیین کنید . ب) حدود m را طوری تعیین کنید که تابع $f(x)=(m-۶)x^۲-x$ در بازه ی $(۲,+\infty]$ صعودی باشد .	۱/۵
٤	اگر ورودی $f(x)=\sqrt{x}$ باشد، خروجی ماشین زیر را تعیین کنید. در هر مرحله شکل مربوطه را رسم کنید. $\sqrt{x}$ ← انتقال دو واحد به سمت راست ← انبساط عمودی با ضریب ۲ ← انعکاس نسبت به محور xها ←	۱/۵
٥	توابع $f(x)=۲\sqrt{x-۵}$, $g(x)=\dfrac{x-۷}{x-۲}$ مفروضند. بدون تشکیل ضابطه دامنه تعریف fog را به دست آورید.	۱
٦	در تقسیم $f(x)=۳x^۲-۵x+۲$ برعبارت $(x-۲)$ مراحل زیر را تکمیل کنید آیا $f(x)$ بر $(x-۲)$ بخش پذیر است ؟ چرا ؟ $\begin{array}{l\|l} ۳x^۲-۵x+۲ & x-۲ \\ -(۳x^۲-۶x) & ...x+..... \\ \hline x+۲ & \\ -(x-۲) & \\ \hline R=...... & \end{array}$	۱
۷	اگر $f(x)=x+a$ و $g(x)=ax^۲+bx+c$ باشد، a , b , c را طوری تعیین کنید که داشته باشیم: $(fog)(x)=x^۲-۳x+۴$	۱
۸	تابع $y=۱-\sin\pi x$ را با پیدا کردن مقادیر ماکسیمم و مینیمم و دوره تناوب آن در یک دوره تناوب رسم کنید .	۲
۹	جواب های کلی معادله مثلثاتی زیر را بدست آورید . $۱+\cos۲x-۲\sin x=-۲$	۲
۱۰	اگر $\tan\dfrac{۲\pi}{۳}\times\sin\left(\dfrac{۳\pi}{۲}-x\right)=۱$ باشد ، مقدار $\cos۲x$ را به دست آورید .	۱/۵
۱۱	حاصل حدود زیر را به دست آورید . $\lim\limits_{x\to-۸}\dfrac{\sqrt[۳]{x}+۲}{۲x+۱۶}$ $\quad\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{۲}^-}\tan x$ $\quad\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{۳x^۲-۲x+۱}{x^۳+۵x-۳}$	۲
۱۲	اگر تابع $f(x)=x^۲-ax$ در نقطه ی $x=۲$ بر خط $y=۳x-۱$ مماس باشد ، مقدار a را بدست آورید .	۱/۵
۱۳	مشتق تابع $y=\|x^۲-۱\|$ را در نقطه $x=۱$ را با استفاده از تعریف مشتق به دست آورید .	۱/۵
۱٤	با توجه به شکل مقابل حاصل حدود زیر را به دست آورید . $\lim\limits_{x\to-۲^+}f(x)$ $\lim\limits_{x\to۰^-}[f(x)]$ $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$  	۱/۵

ردیف	پاسخ نامه تشریحی آزمون دوم	نمره

۱

الف) نادرست چون راس سهمی $x=\frac{-b}{۲a}=\frac{۳}{۲}$ و بعد اون تابع صعودیه



ب) درست چون : $x^۳ < x^۲ \quad \Rightarrow \quad \text{if} \;\; x \in (۰,۱)$

ج) نادرست چون : $f(-۱)=۷\neq ۰$

د) درست چون : در بازه ای که تعریف شده باشه و مجانب قائم نداشته باشه همیشه داریم : $x_۱ < x_۲ \;\Rightarrow\; \tan x_۱ < \tan x_۲$

۲

طول نقطه داده شده را باید ۲ واحد به سمت راست ببریم : $x=-۵ \longrightarrow x=-۵+۲=-۳$ عرض نقطه را باید ۳ برابر کنیم و یک واحد بهش اضافه کنیم . $y=۳ \longrightarrow y=۳(۳)+۱=۱۰$ در کل یعنی :

$$\text{if} \;\; A(x_۰,y_۰)\in f(x) \qquad A'\left|\begin{array}{l}\frac{x_۰-b}{a}\\ k y_۰+k'\end{array}\right. \in g(x)=kf(ax+b)+k'$$

$$A(-۵,۳)\in f(x) \qquad A'\left|\begin{array}{l}\frac{-۵-(-۲)}{۱}=-۳\\ ۳(۳)+۱=۱۰\end{array}\right. \in g(x)=۳f(x-۲)+۱$$

۳

الف) گفته تابع f نزولیه پس باید :

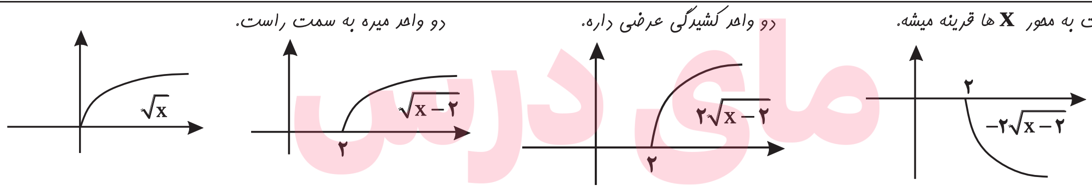
$$f\searrow \Rightarrow \text{if} \;\; x_۱<x_۲ \Rightarrow f(x_۲)<f(x_۱) \Rightarrow f(۳x-۱)<f(۲-x) \Rightarrow ۲-x<۳x-۱ \Rightarrow x>\frac{۳}{۴}$$

ب) برای اینکه تابع تو بازه $[۲,+\infty)$ صعودی باشه باید :

$$f(x)=(m-۶)x^۲-x \Rightarrow a=m-۶>۰ \;\boxed{۱} \;,\; \frac{-b}{۲a}=\frac{۱}{۲(m-۶)}\leq ۲ \;\boxed{۲} \Rightarrow m>۶ \cap m\geq\frac{۲۵}{۴} \Rightarrow m\geq\frac{۲۵}{۴}$$

۴

شکل نسبت به محور x ها قرینه میشه. *دو واحد کشیدگی عرضی داره.* *دو واحد میره به سمت راست.*



۵

$$f=۲\sqrt{x-۵} \Rightarrow x-۵\geq ۰ \Rightarrow D_f=[۵,+\infty) \quad , \quad D_g=R-\{۲\}$$

$$D_{fog}=\left\{x \,\middle|\, x\in D_g=R-\{۲\} \;\; \ni \;\; \frac{x-۷}{x-۲}\geq ۵ \Rightarrow \frac{-۴x+۳}{x-۲}\geq ۰\right\}=\left[\frac{۳}{۴},۲\right)$$

x		$\frac{۳}{۴}$		۲	
$\frac{-۴x+۳}{x-۲}$	−	۰	+	ت ن	−

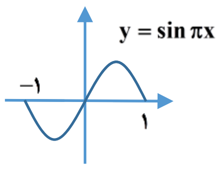
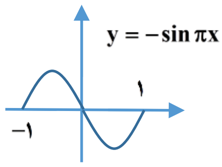
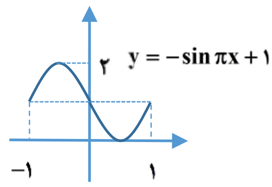
۶

$$\begin{array}{l|l} ۳x^۲-۵x+۲ & x-۲ \\ -(۳x^۲-۶x) & \boxed{۳}x+\boxed{۱} \\ \hline x+۲ & \\ -(x-۲) & \\ \hline R=\boxed{۴} & \end{array}$$

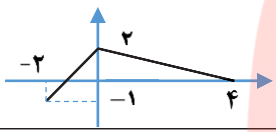
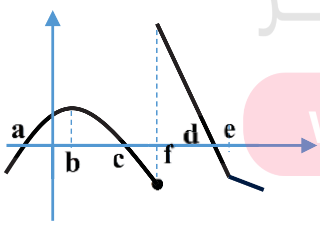
۷

$$f(g(x))=ax^۲+bx+c+a=x^۲-۳x+۴ \Rightarrow \left|\begin{array}{l}a=۱\\ b=-۳\\ c+a=۴ \Rightarrow c=۳\end{array}\right.$$

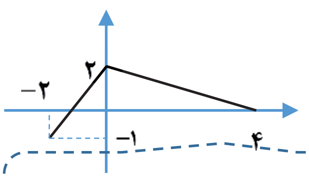
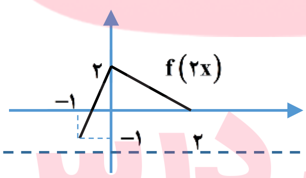
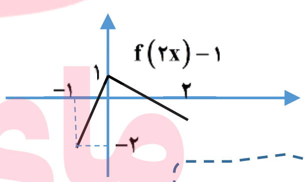
یعنی در تابع f هر جا x داریم به جاش ضابطه ی g رو میگذاریم

۸	$y=1-\sin\pi x=-\sin\pi x+1 \quad \Rightarrow a=-1 \ , b=\pi \ , \ c=1 \ , \ T=\frac{2\pi}{\pi}=2$ $-1\le \sin\pi x\le 1 \quad \Rightarrow \quad -1\le -\sin\pi x\le 1 \quad \Rightarrow \quad 0\le 1-\sin\pi x\le 2$ 	
۹	$1+\cos 2x-2\sin x=2\cos^2 x-2\sin x=2\left(1-\sin^2 x\right)-2\sin x=-2\sin^2 x-2\sin x+2=-2 \ \Rightarrow \ 2\sin^2 x+2\sin x-4=0$ $\sin x=-2$ قابل قبول نیست ، $\sin x=1=\sin\frac{\pi}{2} \ \Rightarrow \ x=2k\pi+\frac{\pi}{2}$ چون مجموع ضرائب معادله صفره ، یکی از جواب ها ۱ میشه و دیگری $\frac{c}{a}$	
۱۰	$tg\frac{2\pi}{3}\sin(\frac{3\pi}{2}-x)=1 \ \Rightarrow \ (-\sqrt{3})(-\cos x)=1 \ \Rightarrow \cos x=\frac{\sqrt{3}}{3} \ \Rightarrow \ \cos 2x=2\cos^2 x-1 \ \Rightarrow \cos 2x=2(\frac{\sqrt{3}}{3})^2-1$	
۱۱	$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{3x^2-2x+1}{x^3+5x-3}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{3x^2}{x^3}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{3}{x}=\frac{3}{\infty}=0$ $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\tan x=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{1}{0^+}=+\infty$ $\lim\limits_{x\to-8}\frac{\sqrt[3]{x}+2}{2x+16}=\frac{0}{0}=\lim\limits_{x\to-8}\frac{\left(\sqrt[3]{x}+2\right)\left(\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}+4\right)}{2\left(x+8\right)\left(\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}+4\right)}=\lim\limits_{x\to-8}\frac{\cancel{(x+8)}}{2\cancel{(x+8)}\,(12)}=\frac{1}{24}$	
۱۲	در نقطه ی تماس خط مماس بر منحنی تابع ، عرض خط مماس و عرض تابع برابر است . $f(2)=2^2-a(2)=3(2)-1=5 \quad \Rightarrow \quad a=\frac{-1}{2}$ یعنی باید در معادله تابع و خط مماس بجای x ، ۲ بگذاریم و مساوی هم قرار بدیم	
۱۳	$f'(1)=\lim\limits_{x\to1}\frac{\lvert x^2-1\rvert-0}{x-1}=\begin{cases}\lim\limits_{x\to1^+}\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}=2=f'_+(1)\\ \lim\limits_{x\to1^-}\frac{-(x-1)(x+1)}{x-1}=-2=f'_-(1)\end{cases}$	
۱۴	$\lim\limits_{x\to-2^+}f(x)=-\infty$ $\lim\limits_{x\to0^-}[f(x)]=[-1^-]=-2$ $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$	
	موفق باشید جمع بارم	۲۰

سوالات امتحان درس:	رشته: تجربی	تعداد صفحه:۲	مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه
نام و نام خانوادگی:	دوره دوم متوسطه	تاریخ امتحان:	ساعت شروع:
دانش آموزان در **نوبت خرداد** ماه سال ۱۳۹۸	آزمون سوم مطابق با امتحانات نهایی خرداد ماه @kimia – mahan		

ردیف	سوالات	نمره
۱	جاهای خالی را پر کنید. الف) در تابع $f(x)=x^3+ax^2+x-1$ داریم $f''(2)=3$ باشد ، مقدار a برابراست با .... ب) تابع $f(x)=\log_{0/4} 2^x$ در دامنه خود صعودی .... ج) تابعی که فقط صعودی یا فقط نزولی باشد را تابع .... می‌گویند. د)برای رسم تابع $f(kx)$ کافی است طول نقاط نمودار تابع $f(x)$ را در .... ضرب می کنیم .	۱
۲	نمودار تابع $f(x)$ شکل مقابل است . نمودار تابع $g(x)=f(2x)-1$ را با توجه به آن رسم کنید و دامنه وبرد آن را تعیین نمایید . 	۱
۳	اگر $f(x)=\sqrt{x-1}$, $g(x)=2x^2-1$ آنگاه دامنه تابع gof را به دست آورید .	۱
٤	معادله مثلثاتی : $2\sin^2 x-3\sin x+1=0$ را حل کنید.	۱/۵
٥	حدود زیر را تعیین کنید . ۳) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^2+x-3}{4-x}$ ۲) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x}+2}{\sqrt[3]{8x-1}}$ ۱) $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{x^2-8x}{\sqrt[3]{x}-2}$	۲
٦	مشتق توابع زیر را به دست آورید (ساده کردن الزامی نیست) $h(x)=\left(\dfrac{-3x-1}{x^2+5}\right)^3$ $g(x)=\dfrac{9x-2}{\sqrt{x}}$ $f(x)=\sqrt{3x+2}\left(x^3+7\right)$	۱/۵
۷	تابع $f(x)=\begin{cases}5x-4 & x<0\\ x^2 & 0\le x\le 3\\ x+6 & x>3\end{cases}$ مفروض است . الف) نمودار تابع را رسم کنید . ب) نمودار f' را رسم کنید . ج) ضابطه تابع مشتق را بنویسید . د) نشان دهید تابع در $x=3$, $x=0$ مشتق ناپذیر است .	۲
۸	با توجه به شکل تابع $f(x)$ و نقاط روی آن به سوالات زیر پاسخ دهید . الف) طول نقاط اکسترمم نسبی تابع اند . ب) طول نقاطی که ماکسیمم مطلق تابع است . پ) طول نقاطی که تابع بحرانی است ولی اکسترمم نسبی نیست . 	۰/۷۵
۹	در تابع $f(x)=-x^3+3x+2$ ابتدا نقاط بحرانی تابع را بدست آورید و سپس با رسم جدول تغییرات تابع, نقاط ماکزیمم نسبی و منیمم نسبی آن را در صورت وجود بدست آورید .	۱/۵
۱۰	مقدار ماکسیمم و مینیمم مطلق تابع با ضابطه ی $f(x)=\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{1}{x}$ در بازه ی $[1,4]$ را به دست آورید .	۱/۵
۱۱	حاصل ضرب دو عدد مثبت برابر ۸ است . کم ترین مقدار ممکن برای مجموع آن ها را محاسبه کنید .	۱
۱۲	کانون های یک بیضی $F(1,3)$, $F'(1,-5)$ می باشند اگر $a=6$ باشد مختصات مرکز و مقادیر قطر کوچک و خروج از مرکز بیضی را به دست آورید .	۱

۱۳	معادله دایره ای را بنویسید که مرکز آن نقطه ی $(1,-1)$ و بر خط $\frac{3}{2}x-2y+4=0$ مماس باشد .	۱
۱٤	به ازای کدام مقدار b دو دایره به معادلات $x^2+y^2+2x-2y=0$, $x^2+y^2-4y+b=0$ مماس داخل اند ؟	۱
۱٥	تاسی را پرتاب میکنیم اگر بدانیم عدد آمده بزرگتر از ۳ است . احتمال آن که عدد آمده اول باشد کدام ا ست .	۱
۱٦	دو جعبه یکسان داریم جعبه اول شامل ۷ مهره سبز و ۵ مهر آبی و جعبه دوم شامل ۶ مهره سبز و ۸ مهره آبی است از جعبه اول به تصادف یک مهره انتخاب می کنیم و در جعبه دوم قرار می دهیم سپس از جعبه دوم یک مهر بر می داریم به چه احتمالی این مهره سبز است ؟	۱/۵
۱۷	جا های خالی را با عبارات مناسب پر کنید . ۱ – شکل حاصل از دوران یک ربع دایره حول شعاع عمود بر قطر آن یک .... است . ۲ – شکل حاصل از دوران یک مثلث قائم الزاویه حول یکی از اضلاع قائمه ....است .	۱
	موفق باشید　　جمع بارم	۲۰

ردیف	پاسخ نامه تشریحی آزمون سوم	نمره
۱	الف) $f' = 3x^2+2ax+1 \Rightarrow f''=6x+2a \Big\|_{x=2} = 3 \Rightarrow a=-\frac{9}{2}$ ب) نیست . بلکه نزولی اکید است : چون پایه لگاریتم : $0<a=0/4<1$ ج)یکنوا د) $\frac{1}{k}$	
۲	   چون ضریب x ، ۲ است تمام x های روی شکل رو در $\frac{1}{2}$ ضرب می کنیم شکل منقبض میشه ولی بردش تغییر نمیکنه حالا کل شکل رو ۱ واحد میاریم پایین	
۳	$D_f=[1,+\infty) \quad , \quad D_g=R \quad D_{gof}=\{x\|x\in D_f ,f(x)\in D_g\}=\{x\|x\in[1,+\infty) , \sqrt{x-1}\in R\}=[1,+\infty)$	
٤	چون مجموع ضرائب معادله صفره ، یکی از جواب ها ۱ میشه و دیگری $\frac{c}{a}$ $2\sin^2 x-3\sin x+1=0 \Rightarrow \sin x=1=\sin\frac{\pi}{2} \Rightarrow x=2k\pi+\frac{\pi}{2} \quad , \quad \sin x=\frac{1}{2}=\sin\frac{\pi}{6} \Rightarrow \begin{cases} x=2k\pi+\frac{\pi}{6} \\ x=2k\pi+\pi-\frac{\pi}{6} \end{cases}$	
٥	$1) \lim_{x\to 8}\frac{x^2-8x}{\sqrt[3]{x}-2}=\frac{0}{0} \lim_{x\to 8}\frac{x(x-8)(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4)}{(\sqrt[3]{x}-2)(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4)}=\lim_{x\to 8}\frac{x\cancel{(x-8)}(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4)}{\cancel{(x-8)}}=\frac{96}{1}$ $2) \lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{x}+2}{\sqrt[3]{8x-1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{8x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\cancel{\sqrt[3]{x}}}{2\cancel{\sqrt[3]{x}}}=\frac{1}{2}$ $3) \lim_{x\to-\infty}\frac{2x^2+x-3}{4-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^2}{-x}=\lim_{x\to-\infty}-2x=+\infty$	

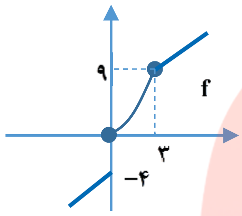
۶

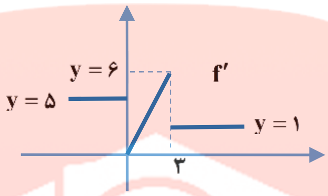
$$f'(x)=\frac{3}{2\sqrt{3x+2}}(x^3+7)+\left(3x^2\right)\sqrt{3x+2}$$

$$g'(x)=\frac{9\sqrt{x}-\frac{1}{2\sqrt{x}}(9x-2)}{\left(\sqrt{x}\right)^2}$$

$$h'(x)=3\left(\frac{-3x-1}{x^2+5}\right)^2\left(\frac{-3\left(x^2+5\right)-(2x)(-3x-1)}{\left(x^2+5\right)^2}\right)$$

۷





$$f(x)=\begin{cases}5x-4 & x<0\\ x^2 & 0\le x\le 3\\ x+6 & x>3\end{cases}\quad\Rightarrow\quad f'(x)=f(x)=\begin{cases}5 & x<0\\ 2x & 0<x<3\\ 1 & x>3\end{cases}$$

تابع در $x=0$ ناپیوسته و در نتیجه مشتق ناپذیر است و در نقطه ی $x=3$ زاویه دار است بطوریکه : $\begin{cases}f'_-(3)=6\\ f'_+(3)=1\end{cases}$ در نتیجه مشتق ناپذیر است .

۸

الف) b ماکسیمم نسبی و f مینیمم نسبی است

ب) ندارد . نقطه ای که در آن بیشترین مقدار تابع قابل تعیین باشد وجود ندارد .

پ) e بحرانی است چون زاویه دارد ولی نه ماکسیمم و نه مینیمم نسبی است .

۹

$f(x)=-x^3+3x+2 \Rightarrow f'(x)=-3x^2+3=0 \Rightarrow x=\pm 1$ نقاط بحرانی

x		-1	1
$f'(x)$	$-$ ↘	0 $+$ ↗	0 $-$ ↘

۱ طول ماکسیمم نسبی — ۱- طول مینیمم نسبی

۱۰

$D_f=R-\{0\} \;,\; f'(x)=\frac{x}{8}-\frac{1}{x^2}=0 \Rightarrow f'=\frac{x^3-8}{8x^2}=0 \Rightarrow x=+2$ نقطه بحرانی

x	1	2	4
$f(x)$	$\frac{17}{16}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{5}{4}$

مینیمم مطلق — ماکسیمم مطلق

۱۱

$$x,y>0 \Rightarrow xy=8 \Rightarrow y=\frac{8}{x} \;,\; f=x+y \Rightarrow f=x+\frac{8}{x} \Rightarrow f'=1-\frac{8}{x^2}=0$$

$$\frac{x^2-8}{x^2}=0 \Rightarrow x^2-8=0 \Rightarrow x=\pm 2\sqrt{2} \Rightarrow f_{min}=f\left(2\sqrt{2}\right)=2\sqrt{2}+\frac{8}{2\sqrt{2}}$$

۱۲

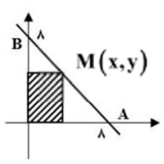
بیضیمون قائم است چون طول های F , F' ثابتند و داریم :

$$O=\frac{F+F'}{2}=\left|\begin{array}{l}\alpha=\frac{1+1}{2}=1\\ \beta=\frac{3-5}{2}=-1\end{array}\right. \quad,\quad FF'=2c=\sqrt{(1-1)^2+(3+5)^2}=8 \Rightarrow c=4$$

$$b=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{36-16}=2\sqrt{5} \Rightarrow BB'=2b=4\sqrt{5} \quad,\quad e=\frac{c}{a}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$$

ردیف	پاسخ	بارم
۱۳	$R=\dfrac{\left\|\frac{3}{2}(1)-2(-1)+4\right\|}{\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2+(2)^2}}=3 \quad \Rightarrow \quad (x-1)^2+(y+1)^2=9$ اول شعاع رو حساب می کنیم که همون فاصله مرکز از خط مماسه	
۱٤	$o_1\left\|\begin{matrix}-1\\1\end{matrix}\right. \quad R_1=\frac{1}{2}\sqrt{4+4}=\sqrt{2}\ ,\ o_2\left\|\begin{matrix}0\\2\end{matrix}\right.\ ,\ R_2=\frac{1}{2}\sqrt{16-4b}=\sqrt{4-b}\ ,d=\sqrt{(-1)^2+(1-2)^2}=\sqrt{2}\ ,\ \left\|R_2-R_1\right\|=d$ برای مماس داخل بودن باید $\left\|\sqrt{4-b}-\sqrt{2}\right\|=\sqrt{2} \Rightarrow \sqrt{4-b}=2\sqrt{2} \Rightarrow 4-b=8 \Rightarrow b=-4$	
۱۵	در پرتاب یک تاس فضای نمونه ای $S=\{1,2,3,4,5,6\}$ است می دانیم عدد بر زمین نشسته بزرگ تر از ۳ رخ داده اگر پیشامد عدد بر زمین نشسته اول است را A بنامیم و پیشامدی که رخ داده را B در نظر بگیریم ، احتمال شرطی A به شرط وقوع B برابر است با : $B=\{4,5,6\}\ ,\ A=\{2,3,5\}\ ,\ A\cap B=\{5\} \Rightarrow P(A\|B)=\dfrac{n(A\cap B)}{n(B)}=\dfrac{1}{3}$	
۱٦	پاسخ مهره انتخاب شده از جعبه اول یا سبز است با احتمال $p(g)=\frac{7}{12}$ ویا آبی با احتمال $p(b)=\frac{5}{12}$ از طرفی پیشامد انتخاب مهره سبز از جعبه دوم را با A نشان می دهیم و داریم $p(A\|g)=\frac{7}{15}$ و $p(A\|b)=\frac{6}{15}$ در این صورت احتمال آن که مهره خارج شده سبز باشد برابر است با : $p(A)=p(g)p(A\|g)+p(b)p(A\|b)=\frac{7}{12}\times\frac{7}{15}+\frac{5}{12}\times\frac{6}{15}$	
۱۷	۱) نیم کره　　۲) مخروط	
	موفق باشید　　جمع بارم	۲۰

سوالات امتحان درس:	رشته: تجربی	تعداد صفحه:۲	مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه
نام و نام خانوادگی:	دوره دوم متوسطه	تاریخ امتحان:	ساعت شروع:
دانش آموزان سراسر کشور در **نوبت خرداد** ماه سال ۱۳۹۸		آزمون چهارم : **@kimia – mahan**	

ردیف	سوالات	نمره
۱	در جای خالی عبارات مناسب قرار دهید . الف) وارون تابع: $f(x)=(x-1)^{2}\ ,\ x\le 1$ تابع .... می باشد . ۱) $f^{-1}(x)=-\sqrt{x}+1$ ۲) $f^{-1}(x)=\sqrt{x}+1$ ب) دوره تناوب تابع $y=-3\cos\left(\frac{\pi x}{8}\right)-2$ برابر................ است . ج) اگر بتوان مقادیر $f(x)$ را از هر عدد مثبت دلخواه بزرگتر کرد به شرط انکه x را با مقادیر بزرگتر از -2 به قدر کافی به -2 نزدیک اختیار کنیم در اینصورت می گوییم	۰/۷۵
۲	تابع $y=x^{2}\lvert x\rvert$ در بازه $(-\infty,a]$ نزولی است حداکثر مقدار a را به دست آورید .	۰/۷۵
۳	یکی از معادلات زیر را حل کنید وجواب های عمومی آن معادله را تعیین نمایید . ۱) $\cos 2x-\sin x-\cos\pi=1$ ۲) $\cos x(2\cos x-9)=0$	۱/۵
٤	حدود زیر را تعیین کنید . ۱) $\lim\limits_{x\to -\frac{1}{2}^{-}}\frac{4x+1}{(2x+1)^{2}}$ ۲) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x-\sqrt{2x-1}}{x^{2}-x}$ ۳) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\tan 2x$ ۴) $\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{2x^{3}-3x+7}{3x^{3}+5x+2}$	۲
٥	مشتق توابع زیر را بدست آورید.(ساده کردن الزامی نیست) $f(x)=\left(\frac{x^{2}}{3x-1}\right)^{5}$, $g(x)=(x^{3}+1)+\sqrt{3x+2}$, $h(x)=\frac{x^{2}-4}{3x+1}$	۱/۵
٦	معادله حرکت متحرکی $g(t)=\frac{1}{2}t^{2}-3t+1$ می باشد . ۱) تغییرات متوسط این متحرک در فاصله زمانی $[0,4]$ را تعیین کنید . ۲) آهنگ تغییر آنی متحرک را در $t=7$ بیابید .	۱/۲۵
۷	اگر $f(x)=\frac{1}{x-1}$ باشد تابع مشتق ، و دامنه آن را به دست آورید .	۰/۷۵
۸	ماکزیمم ، مینیمم مطلق تابع با ضابطه ی $f(x)=2-\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}\sqrt{x^{2}+9}$ را دربازه $[1,8]$ را محاسبه کنید .	۱/۷۵
۹	ماکزیمم مساحت ناحیه سایه خورده کدام است .  	۱/۵
۱۰	۱۶) نقاط $B(7,4)$, $B'(-1,4)$ دو سر قطر کوچک یک بیضی اند . اگر فاصله کانونی بیضی ۴ باشد ، مختصات دو سر قطر اصلی کانون ها و خروج از مرکز بیضی را به دست آورید .	۱/۷۵
۱۱	وضعیت خط $x+y-3=0$ نسبت به دایره $x^{2}+y^{2}-2y-3=0$ را مشخص کنید .	۱

۱۲	دو دایره به معادلات : $\begin{cases} x^2+y^2+2x+6y+6=0 \\ (x-2)^2+(y-1)^2=3 \end{cases}$ نسبت به هم چه وضعی دارند ؟	۱/۲۵
۱۳	اگر یک لوزی با قطر های ۱۰ و ۶ را حول قطر بزرگ آن دوران دهیم حجم شکل حاصل را محاسبه کنید .	۰/۷۵
۱۴	کارمندان اداره ای مطابق جدول زیر توزیع شده اند احتمال آن که کارمند مردی تحصیلات دانشگاهی داشته باشد چقدر ا ست ؟	۱
۱۵	سه جعبه یکسان داریم، در اولین جعبه ۱۲ مهره قرار دارد که ۴ تای آنها قرمز است و در جعبه دوم ۱۰ مهره وجود دارد که تمام آنها قرمزند و در جعبه سوم ۸ مهره قرار دارد که ۶ تای آنها قرمز است. به تصادف یکی از جعبه ها را انتخاب کرده و از آن یک مهره بیرون می آوریم. احتمال اینکه مهره انتخابی قرمز باشد را پیدا کنید.	۱/۵
	موفق باشید جمع بارم	۲۰

جدول سوال ۱۴:

	زن	مرد
تحصیلات دانشگاهی	۱۵	۲۵
تحصیلات کمتر ازدانشگاهی	۷۵	۹۵

ردیف | پاسخ نامه | نمره

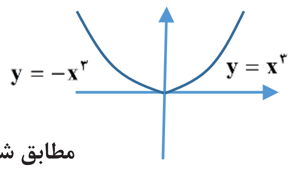
۱

الف) گزینه ۱ $y=(x-1)^2 \; , x\le 1 \qquad \sqrt{y}=|x-1| \Rightarrow \sqrt{y}=-x+1 \Rightarrow x=-\sqrt{y}+1 \Rightarrow f^{-1}(x)=-\sqrt{x}+1$

ب) ۱۶ $y=-3\cos\left(\frac{\pi x}{8}\right)-2 \quad , \quad T=\frac{2\pi}{b}=\frac{2\pi}{\frac{\pi}{8}}=16$

ج) $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x)=+\infty$

۲



$y=x^2|x|=\begin{cases} -x^3 & x<0 \\ x^3 & x\ge 0 \end{cases}$

مطابق شکل تابع در بازه $(-\infty,0]$ نزولی است بنابراین حداکثر مقدار a صفراست

۳

$1)\ \cos\pi=-1 \Rightarrow \cos 2x-\sin x+1=1 \Rightarrow \cos 2x=\sin x=\cos(\frac{\pi}{2}-x) \Rightarrow 2x=2k\pi\pm(\frac{\pi}{2}-x) \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{2k\pi}{3}+\frac{\pi}{6} \\ x=2k\pi-\frac{\pi}{2} \end{cases}$

$2)\ \cos x(2\cos x-9)=0 \Rightarrow \cos x=0 \Rightarrow x=2k\pi\pm\frac{\pi}{2} \quad , \quad 2\cos x-9=0 \Rightarrow \cos x=\frac{9}{2}$ غ ق ق

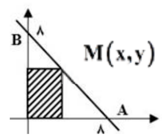
۴

$1)\ \lim\limits_{x\to \frac{1}{2}^-}\frac{4x+1}{(2x+1)^2}=\frac{3}{0^+}=+\infty$

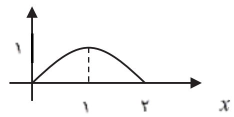
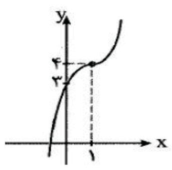
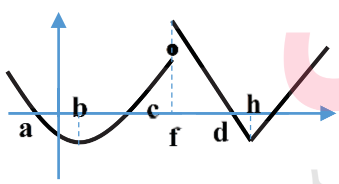
$2)\ \lim\limits_{x\to 1}\frac{x-\sqrt{2x-1}}{x^2-x}\times\frac{x+\sqrt{2x-1}}{x+\sqrt{2x-1}}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-2x+1}{x(x-1)(2)}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{(x-1)^2}{x(x-1)(2)}=0$

$3)\ \lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\tan 2x \begin{cases} \lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}^+}\tan 2x=-\infty \\ \lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}^+}\tan 2x=+\infty \end{cases}$

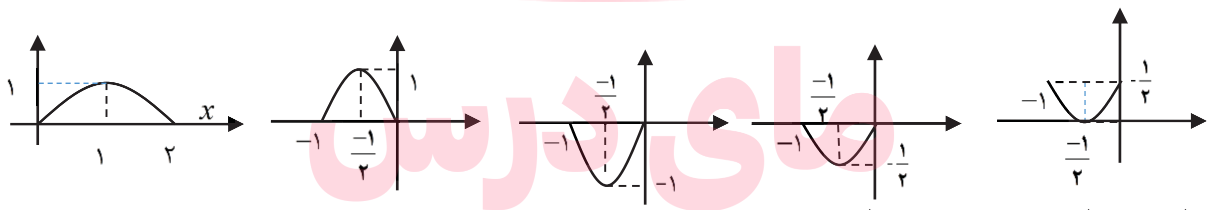
$4)\ \lim\limits_{x\to -\infty}\frac{2x^3-3x+7}{3x^3+5x+2}=\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{2x^3}{3x^3}=\frac{2}{3}$

۵	$f'(x)=5\left(\frac{x^2}{3x-1}\right)^4\left(\frac{2x(3x-1)-3(x^2)}{(3x-1)^2}\right)$ $g'(x)=(3x^2)+\frac{3}{2\sqrt{3x+2}}$ $h'(x)=\frac{2x(3x+1)-3(x^2-4)}{(3x+1)^2}$ $(uv)'=u'v+v'u$ ، $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-v'u}{v^2}$ $\left(\sqrt[n]{u^m}\right)'=\frac{mu'}{n\sqrt[n]{u^{n-m}}}$ ، $(u\pm v)'=u'\pm v'$	
۶	۱) $\frac{g(4)-g(0)}{4-0}=\frac{-3-1}{4}=-1$, ۲) $g'(x)=t-3 \Rightarrow g'(7)=7-3=4$	
۷	$f(x)=\frac{1}{x-1} \Rightarrow f'(x)=\frac{-1}{(x-1)^2}$ $\quad D_{f'}=R-\{1\}$	
۸	$f(x)=2-\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}\sqrt{x^2+9} \Rightarrow f'(x)=-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\frac{2x}{2\sqrt{x^2+9}}=\frac{2x-\sqrt{x^2+9}}{4\sqrt{x^2+9}}=0$ $2x-\sqrt{x^2+9}=0 \Rightarrow 4x^2=x^2+9 \Rightarrow x=\pm\sqrt{3}$ x: 1 ، $\sqrt{3}$ ، 8 $f(x)$: $\frac{2\sqrt{10}+7}{4}$ ، $\frac{8+3\sqrt{3}}{4}$ (مینیمم) ، $\frac{\sqrt{73}}{2}$ (ماکزیمم)	
۹	اول معادله خط گذرا از A و B را می نویسیم .  $L_{AB}: y-0=\frac{0-8}{8-0}(x-8) \Rightarrow y=-x+8$ $S=x\times y=x(-x+8)=-x^2+8x \Rightarrow S'(x)=-2x+8=0 \Rightarrow x=4$ $S_{(4)}=-16+32=16$	
۱۰	$B'(-1,4)\ ,\ B(7,4) \Rightarrow O\left\|\begin{matrix}\alpha=\frac{-1+7}{2}=3\\ \beta=\frac{4+4}{2}=4\end{matrix}\right. \Rightarrow BB'=2b=\sqrt{(7+1)^2+(4-4)^2}=8 \Rightarrow b=4$ بیضیمون قائم $FF'=4 \Rightarrow c=2 \Rightarrow a=\sqrt{2^2+4^2}=2\sqrt{5} \Rightarrow e=\frac{c}{a}=\frac{2}{2\sqrt{5}}=\frac{1}{\sqrt{5}}$	
۱۱	$x^2+y^2-2y-3=0 \Rightarrow O\left\|\begin{matrix}\alpha=\frac{0}{2}=0\\ \beta=\frac{2}{2}=1\end{matrix}\right.,\ R=\frac{1}{2}\sqrt{4+12}=2\ ,\ OH=\frac{\|0+1-3\|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\sqrt{2} \Rightarrow R>OH$ متقاطع اند	
۱۲	$o_1\left\|\begin{matrix}\alpha=-1\\ \beta=-3\end{matrix}\right.$ $\quad R_1=\frac{1}{2}\sqrt{4+36-24}=2\ ,\ o_2\left\|\begin{matrix}2\\ 1\end{matrix}\right.,\ R_1=\sqrt{3}$ $\|o_1o_2\|=d=\sqrt{(2+1)^2+(1+3)^2}=\sqrt{25}=5$ $\quad R_1+R_2=2+\sqrt{3}<d=5$ متخارج هستند	
۱۳	دو مخروط هم قاعده به ارتفاع ۵ و شعاع ۳ خواهیم داشت در نتیجه : $V=2\left(\frac{\pi}{3}r^2h\right)=2\left(\frac{\pi}{3}(3)^2 5\right)=30\pi$	
۱۴	پیشامد دارا بودن تحصیلات دانشگاهی : A $\quad$ پیشامد مرد بودن شخص مورد نظر : B $P(A\|B)=\frac{n(A\cap B)}{n(B)}=\frac{25}{25+95}=\frac{25}{120}$	
۱۵	$p(j_1)p(g\|j_1)+p(j_2)p(g\|j_2)+p(j_3)p(g\|j_3)=\frac{1}{3}\times\frac{4}{12}+\frac{1}{3}\times\frac{10}{10}+\frac{1}{3}\times\frac{6}{8}=\frac{25}{36}$	
	موفق باشید $\quad$ جمع بارم	۲۰

سوالات امتحان درس:	رشته: تجربی	تعداد صفحه:۲	مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه
نام و نام خانوادگی:	دوره دوم متوسطه	تاریخ امتحان:	ساعت شروع:
دانش آموزان سراسر کشور در **نوبت خرداد** ماه سال ۱۳۹۸		آزمون پنجم : @kimia – mahan	

ردیف	سوالات	نمره
۱	اگر $f(x)=\frac{x-24}{8}$, $g(x)=x^3$ باشد مقادیر $1)(fog)^{-1}(5)$, $2)(f^{-1}of^{-1})(6)$ را تعیین کنید .	۱
۲	نمودار تابع معین $y=f(x)$ در شکل رو به رو داده شده ا ست نمودار تابع $y=-\frac{1}{2}f(-2x)+\frac{1}{2}$ را رسم کنید و مراحل راتوضیح دهید . 	۱
۳	نمودار تابع $f(x)=b(x-a)^3+c$ به صورت مقابل است مقادیر c, b, a را به دست آورید . 	۱
٤	جواب کلی معادلهی مثلثاتی : $2\sin^2 x+3\cos x=0$ ، کدام است؟	۱/۵
۵	حدود زیر را محاسبه کنید $1)\lim\limits_{x\to -2}\frac{x^3+8}{4x^3+6x^2+8}$ $2)\lim\limits_{x\to \frac{-1}{4}}\frac{[2x]-3}{\|4x+1\|}$ $3)\lim\limits_{x\to 1}\frac{x-\sqrt{x}}{x^2+x-2}$	۱/۵
٦	شیب خط مماس بر تابع $y=-x^2+10x$ را در نقطه ای به طول $x=3$ واقع برمنحنی تابع با استفاده از تعریف مشتق (محاسبه حد) به دست بیاورید و معادله خط مماس بر تابع را دراین نقطه بنویسید .	۱
۷	مشتق توابع زیر را بگیرید (ساده کردن الزامی نیست) $f(x)=\frac{-x}{2x^2-x+1}$ $g(x)=\left(\frac{x^2}{3x+1}\right)^4$ $h(x)=\sqrt{2-\frac{1}{3x}}$	۱/۵
۸	با توجه به شکل تابع $f(x)$ و نقاط روی آن به سوالات زیر پاسخ دهید . الف) طول نقاطی که مشتق صفر است . ب) طول نقاطی مقدار مشتق آن منفی است . پ) طول نقاطی که مشتق وجود ندارد . 	۰/۷۵
۹	تابع $f(x)=7\sqrt{x}+50$ قد متوسط کودکان را بر حسب سانتیمتر تا حدود ۶۰ ماهگی نشان می دهد که در آن x مدت زمان پس از تولد بر حسب ماه است،آهنگ متوسط رشد در بازه زمانی $[0,25]$ و آهنگ لحظه ای در $x=16$ را محاسبه کنید .	۱
۱۰	تابع $f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{5}{2}x^2+6x$ مفروض است الف) این تابع در چه بازه ای صعودی و در چه بازه ای نزولی است . ب) ماکزیمم و می نیمم مطلق آن را در بازه $[1,4]$ را تعیین کنید	۱/۷۵
۱۱	می خواهیم یک استوانه فلزی در باز با حجم 24π سانتی متر مکعب بسازیم . شعاع قاعده استوانه را چقدر انتخاب کنیم تا فلز به کار رفته در ساخت استوانه کم ترین مقدار ممکن شود .	۱/۵
۱۲	دایره C به مرکز $(-1,2)$ و شعاع ۳ و دایره 'C به معادله $x^2+y^2+2x+6y+6=0$ نسبت به هم چگونه هستند.	۱
۱۳	معادله دایره ای را بنویسید که با دایره $x^2+y^2-4x+8y=0$ هم مرکز بوده و بر خط $2y-3x+1=0$ مماس باشد .	۱
١٤	خروج از مرکز بیضی که $A'\begin{vmatrix}-1\\2\end{vmatrix}$ راس کانونی و $B'\begin{vmatrix}3\\0\end{vmatrix}$ راس غیر کانونی آن باشد ، کدام است ؟	۱
۱۵	ازبین سه کارت سفید و ۴ کارت سبز یکسان به تصادف یک کارت بیرون می آوریم . بدون جای گذاری سپس کارت دوم را خارج می کنیم با کدام احتمال هر دو کارت همرنگ هستند .	۱

ردیف		نمره
۱۶	در کیسه ای ۵ مهره قرمز و ۳ مهر آبی و در کیسه دوم ۴ مهره قرمز و ۵ مهره آبی داریم . تاسی را پرتاب می کنیم اگر عدد رو شده مضرب ۳ باشد از کیسه اول دومهره و اگر مضرب ۳ نباشد از کیسه دوم ۲ مهره بر می داریم احتمال آنکه دو مهر همرنگ نباشند را محاسبه کنید .	۱/۵
۱۷	جاهای خالی را با عبارات مناسب پر کنید . الف) نمودار تابع $y=x^3+6x^2+12x+8$ را می توان با .... واحد انتقال نمودار $y=x^3$ به سمت .... رسم کرد . ب) برای آن که تابع $f(x)=mx+n$ در تمام دامنه اش هم صعودی و هم نزولی باشد مقدار m باید برابر .... باشد . ج) اگر دوره تناوب تابع $y=-3\cos(\frac{m-1}{3}x+1)$ برابر $\frac{3\pi}{2}$ باشد مقدار m برابر است با .... د) اگر $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{ax^4-5x^2+x-2}{2x^m+7x^3-6}=\frac{-1}{3}$ مقادیر m , a به ترتیب از راست به چپ : .... و .... می باشند	۱
	موفق باشید جمع بارم	۲۰

ردیف	پاسخ نامه تشریحی آزمون پنجم	نمره
۱	$g(x)=x^3 \Rightarrow g^{-1}(x)=\sqrt[3]{x}\ ,\ f(x)=\frac{x-24}{8} \Rightarrow f^{-1}(x)=8x+24$ $y=f(g(x))=f(x^3)=\frac{1}{8}x^3-3 \Rightarrow y+3=\frac{1}{8}x^3 \Rightarrow x=\sqrt[3]{8(y+3)} \Rightarrow (fog)^{-1}=\sqrt[3]{8x+24}$ $1)(fog)^{-1}(x)=\sqrt[3]{8x+24} \Rightarrow (fog)^{-1}(5)=\sqrt[3]{8\times5+24}=\sqrt[3]{64}=4$ $2)(f^{-1}of^{-1})(6)=f^{-1}(f^{-1}(6))=f^{-1}(8\times6+24)=f^{-1}(72)=8\times72+24=600$	
۲	 $y=f(x)$ $y=f(-2x)$ $y=-f(-2x)$ $y=\frac{-1}{2}f(-2x)$ $y=\frac{-1}{2}f(-2x)+\frac{1}{2}$	
۳	با توجه به نمودار تابع $y=x^3$ باید عبارت درجه ۳ در $x=1$ صفر شود و مختصات نقاط معلوم تابع باید در آن صدق کند . $(x-a)^3\big\|_{x=1}=(1-a)^3=0 \Rightarrow a=1 \Rightarrow \begin{cases} f(1)=b(1-1)+c=4 \Rightarrow c=4 \\ f(0)=b(0-1)+c=3 \Rightarrow -b+4=3 \Rightarrow b=1 \end{cases}$	
٤	$2\sin^2 x+3\cos x=0 \Rightarrow 2(1-\cos^2 x)+3\cos x=0 \Rightarrow 2\cos^2 x-3\cos x-2=0$ $\cos x=\frac{3\pm\sqrt{9+16}}{4}=\frac{3\pm5}{4}=\begin{cases} 2 & \text{غ ق ق} \\ -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \cos x=\frac{-1}{2}=\cos\frac{2\pi}{3} \Rightarrow x=2k\pi\pm\frac{2\pi}{3}$	

۵

۱) $\lim_{x\to -۲} \frac{x^۳+۸}{۴x^۳+۶x^۲+۸} = \frac{۰}{۰} = \lim_{x\to -۲} \frac{\cancel{(x+۲)}(x^۲-۲x+۴)}{۲\cancel{(x+۲)}(۲x^۲-x+۲)} = \frac{۱۲}{۲۴} = \frac{۱}{۲}$

۲) $\lim_{x\to -\frac{۱}{۴}} \frac{[۲x]-۳}{|۴x+۱|} = \lim_{x\to \left(-\frac{۱}{۴}\right)^{\pm}} \frac{-۱-۳}{۰^+} = -\infty$ $\qquad \lim_{x\to -\frac{۱}{۴}} [۲x] = \left[\frac{-۲}{۴}\right] = -۱$

اول تکلیف قسمت براکتی رو تعیین کن

۳) $\lim_{x\to ۱} \frac{x-\sqrt{x}}{x^۲+x-۲} = \frac{۰}{۰} = \lim_{x\to ۱} \frac{x-\sqrt{x}}{x^۲+x-۲} \times \frac{x+\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}} = \lim_{x\to ۱} \frac{x^۲-x=\cancel{(x-۱)}x}{\cancel{(x-۱)}(x+۲)(x+\sqrt{x})} = \frac{۱}{۶}$

۶

$f'(۳) = \lim_{h\to ۰} \frac{f(۳+h)-f(۳)}{h} = \lim_{h\to ۰} \frac{-(۳+h)^۲+۱۰(۳+h)-۲۱}{h} = \lim_{h\to ۰} \frac{-۹-۶h-h^۲+۳۰+۱۰h-۲۱}{h}$

$\lim_{h\to ۰} \frac{-h^۲+۴h}{h} = \lim_{h\to ۰}(-h+۴) = ۴$

$A\begin{vmatrix} x=۳ \\ f(۳)=۲۱ \end{vmatrix} \xrightarrow{f'(۳)=۴} \quad L:\ y-۲۱ = ۴(x-۳)$

۷

$f(x) = \frac{-x}{۲x^۲-x+۱} \Rightarrow f'(x) = \frac{-۱(۲x^۲-x+۱)-(۴x-۱)(-x)}{(۲x^۲-x+۱)^۲}$

$g(x) = \left(\frac{x^۲}{۳x+۱}\right)^۴ \Rightarrow g'(x) = ۴\left(\frac{۲x(۳x+۱)-(۳)x^۲}{(۳x+۱)^۲}\right)\left(\frac{x^۲}{۳x+۱}\right)^۳$

$h(x) = \sqrt{۲-\frac{۱}{۳x}} \Rightarrow h'(x) = \frac{\frac{۳}{(۳x)^۲}}{۲\sqrt{۲-\frac{۱}{۳x}}}$

$(uv)' = u'v+v'u$	$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-v'u}{v^۲}$
$\left(\sqrt[n]{u^m}\right)' = \frac{mu'}{n\sqrt[n]{u^{n-m}}}$	$(u\pm v)' = u'\pm v'$

۸

الف) b چون خط مماس افقی میشه $\qquad$ ب) d , a تابع در این نقاط نزولیه

پ) f , h چون : تابع در نقطه f ناپیوسته و مشتق ناپذیر و در h زاویه داره یعنی مشتق ناپذیره

۹

$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{f(۲۵)-f(۰)}{۵-۰} = \frac{(۷\sqrt{۲۵}+۵۰)-(۷\sqrt{۰}+۵۰)}{۵} = \frac{۳۵}{۵} = ۷ \quad , \quad f'(x) = \frac{۷}{۲\sqrt{x}} \Rightarrow f'(۱۶) = \frac{۷}{۸}$

۱۰

$f(x) = \frac{۱}{۳}x^۳ - \frac{۵}{۲}x^۲ + ۶x \Rightarrow f'(x) = x^۲-۵x+۶ = ۰ \Rightarrow x=۲\ ,\ x=۳$

x	۱	۲	۳	۴
$f'(x)$	+ ↘	− ↗	+ ↘	
$f(x)$	۳/۸	۴/۶	۴/۵	۵/۳

مینیمم $\qquad$ ماکسیمم

اول از تابع مشتق گرفتیم بعد نقاط بحرانی رو حساب کردیم بعد مشتق رو با توجه به نقاط بحرانی تعیین علامت کردیم تا یکنوایی تابع تعیین شود سپس مقادیر تابع را برای ابتدا و انتهای بازه و نقاط بحرانی به دست آوردیم بیشترین و کمترین مقدار تابع تعیین می شود .

۱۱

$V = \pi r^۲ h = ۲۴\pi \Rightarrow h = \frac{۲۴}{r^۲} \quad , \quad S = ۲\pi rh + \pi r^۲ \Rightarrow S = ۲\pi r\frac{۲۴}{r^۲} + \pi r^۲ = \frac{۴۸\pi}{r} + \pi r^۲$

سطح جانبی استوانه $\qquad$ سطح قاعده استوانه

$S'_r = \frac{-۴۸\pi}{r^۲} + ۲\pi r = ۰ \Rightarrow r^۳ = ۲۴ \Rightarrow r = ۲\sqrt[۳]{۳}$

۱۲

$o_۱\begin{vmatrix} -۱ \\ ۲ \end{vmatrix} \ ,\ R_۱ = ۳ \ ,\ x^۲+y^۲+۲x+۶y+۶ = ۰ \Rightarrow o_۲ = \begin{vmatrix} -۱ \\ -۳ \end{vmatrix} \ ,\ R_۲ = \frac{۱}{۲}\sqrt{۴+۳۶-۲۴} = ۲$

$|o_۱o_۲| = d = \sqrt{(-۱+۱)^۲+(-۳-۲)^۲} = ۵ \Rightarrow R_۱+R_۲ = ۵ = d \Rightarrow$ مماس خارجند

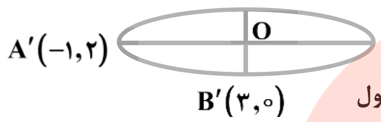
۱۳

اول مرکز دایره رو از روی دایره داده شده تعیین می کنیم چون گفته هم مرکزند . بعد فاصله مرکز رو از خط مماس بدست می آوریم که همون شعاع دایره است

$$O\left|\begin{array}{l}\alpha=\frac{4}{2}=2\\ \beta=\frac{-8}{2}=-4\end{array}\right. \Rightarrow R=\frac{|2(-4)-3(2)+1|}{\sqrt{(-3)^2+(2)^2}}=\frac{13}{\sqrt{13}}=\sqrt{13} \Rightarrow (x-2)^2+(y+4)^2=13$$

۱۴

با توجه به شکل مرکز و طول قطر های بیضی تعیین می شود .



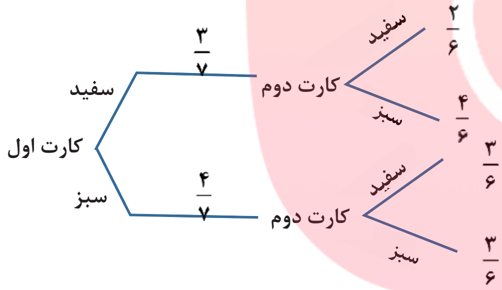
قشنگ دقت کن روی قطر اصلی بیضی افقی عرض همه نقاط $y=\beta$ است و روی قطر فرعی طول همه نقاط با هم یکی و $x=\alpha$ است . پس

$$x_O=x_B \ , \ y_O=y_A \Rightarrow O(3,2) \Rightarrow OB'=b=2 \ , \ OA'=a=4 \Rightarrow c^2=a^2-b^2 \Rightarrow c=\sqrt{16-4}=2\sqrt{3}$$

$$e=\frac{c}{a}=\frac{2\sqrt{3}}{4}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

۱۵

یعنی هر دو کارت سفید یا هر دو کارت سبز باید باشه



$$p=\frac{3}{7}\times\frac{2}{6}+\frac{4}{7}\times\frac{3}{6}=\frac{1}{7}+\frac{2}{7}=\frac{3}{7}$$

۱۶

مضارب ۳ یعنی $\{3,6\}$ و غیر سه یعنی $\{1,2,4,5\}$ پس داریم

$$P=\overbrace{\frac{2}{6}}^{\text{احتمال مضارب ۳}}\times\underbrace{\frac{\binom{5}{1}\binom{3}{1}}{\binom{8}{2}}}_{\text{احتمال همرنگ نباشد کیسه اول}}+\overbrace{\frac{4}{6}}^{\text{احتمال مضارب غیر ۳}}\times\underbrace{\frac{\binom{5}{1}\binom{4}{1}}{\binom{9}{2}}}_{\text{احتمال همرنگ نباشد کیسه دوم}}=\frac{2}{6}\times\frac{15}{28}+\frac{4}{6}\times\frac{20}{36}=$$

۱۷

الف) ۲ – به سمت چپ : $y=x^3 \Rightarrow y=(x+2)^3=x^3+6x^2+12x+8$

ب) صفر : خطی افقی می شود که در تعریف صعودی و نزولی صدق می کند $y=mx+n \xrightarrow{m=0} y=n$

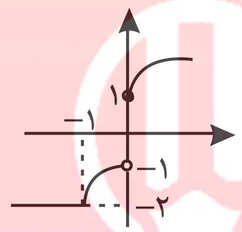
ج) ۵ : $T=\frac{2\pi}{\frac{m-1}{3}}=\frac{6\pi}{m-1}=\frac{3\pi}{2} \Rightarrow m-1=4 \Rightarrow m=5$

د) $4\ ,\ \frac{-2}{3}$: چون جواب حد عدد ناصفر شده باید صورت و مخرج هم توان باشند پس $m=4$ از طرفی

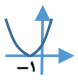
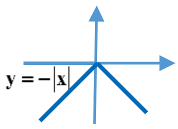
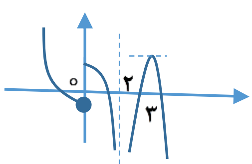
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{ax^4-5x^2+x-2}{2x^m+7x^3-6}=\frac{ax^4}{2x^4}=\frac{a}{2}=\frac{-1}{3} \Rightarrow a=\frac{-2}{3}$$

جمع بارم ۲۰ — موفق باشید

سوالات امتحان درس:	رشته: تجربی	تعداد صفحه:۲	مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه
نام و نام خانوادگی:	دوره دوم متوسطه	تاریخ امتحان:	ساعت شروع:
دانش آموزان سراسر کشور در نوبت خرداد ماه سال ۱۳۹۸		آزمون ششم :	@kimia – mahan

ردیف	سوالات	نمره
۱	جاهای خالی را با عبارت مناسب پر کنید. الف)تابع $y=(x+1)^{۲}\lvert x+1\rvert$ در بازه $(-\infty , a]$ نزولی است.حداکثرمقدار a ....است. ب) باقی مانده ی تقسیم چند جمله ای $f(x)=-۲x^{۲}-۴x+۸$ بر $x+۳$ برابر است با .... ج)اگر $k>1$ باشد نمودار $y=kf(x)$ از .... نمودار $y=f(x)$ حاصل می شود . د) $x=0$ طول .... نسبی ومطلق تابع $f(x)=-\lvert x\rvert$ می باشد .	۱
۲	دو تابع $f(x)=\frac{۳x}{1-x^{۲}}\ ,\ g(x)=\sqrt{x-1}$ مفروض‌اند. دامنه‌ی تابع fog را بدون محاسبه‌ی ضابطه‌ی fog به دست آورید.	۱
۳	جواب های عمومی معادله مثلثاتی $\sin(\pi+x)\cos\left(\frac{\pi}{۲}+x\right)-۲\sin(\pi-x)+1=0$ را به دست آورید .	۱
٤	با توجه به نمودار تابع f حاصل حدهای زیر را به دست آورید.  $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=$ $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=$ $\lim\limits_{x\to -1} f(x)=$ $\lim\limits_{x\to 0^-} [f(x)]=$	۱
٥	حاصل حدود زیر را به دست آورید . $۱)\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{x^{۳}+۲x-۲}{-۲x^{۳}+x^{۲}+۳}$ $\quad$ $۲)\lim\limits_{x\to ۲}\frac{x^{۳}+x-10}{x^{۳}-۴x}$	۱/۵
٦	مشتق توابع زیر را بگیرید.(ساده کردن الزامی نیست) $۱)\ f(x)=\sqrt{x}\left(\frac{1}{x}\right)$ $۲)g(x)=(۲x-۳)^{۴}(x^{۲}+۵x)$ $۳)h(x)=\sqrt{۵-۷x}\left(۴-\frac{x}{۲}\right)$	۱/۵
۷	اگر g , f توابع مشتق پذیر و $۳f'(۲)=f(۲)=۳\ ,\ g(۲)=-۳\ ,\ g'(۲)=۲$ باشند مقادیر $\left(\frac{g}{f}\right)'_{(۲)}\ ,\ (f\times g)'_{(۲)}$ را به دست آورید.	۱
۸	نمودار تابع ای را رسم کنید که در تمام شرایط زیر صدق کند . الف)در $x=0$ مشتق پذیر نباشد . ب) وقتی $x\to ۲$ آنگاه $y\to -\infty$ ج) مشتق آن در $x=۳$ برابر صفر باشد .	۱
۹	یک توده باکتری پس از t ساعت دارای جرم $k(t)=۲t^{۳}+\sqrt{t}$ گرم است . جرم این توده باکتری در بازه زمانی $0\le t\le ۴$ به طور متوسط چند گرم افزایش می یابد و تغییرات آنی آن در $t=1$ را حساب کنید .	۰/۷۵
۱۰	برای تابع $y=\lvert\lvert x\rvert-۲\rvert$ نقاط بحرانی و نوع اکسترمم های نسبی آن را تعیین کنید و در بازه $[-۵,۳]$ ماکسیمم و مینیمم مطلق تابع را تعیین کنید .	۱/۵

۱۱	اگر x , y دو متغیر مثبت به طوری که $2x+y=64$ ماکزیمم مقدار xy را تعیین کنید .	۱/۲۵
۱۲	جا های خالی را با عبارات مناسب پر کنید . الف – شکل حاصل از دوران یک مثلث قائم الزاویه حول وتر آن .... است . ب – اگر یک لوزی با طول قطر های ۶ و ۴ را حول قطر بزرگ آن دوران دهیم حجم شکل حاصل .... است .	۱
۱۳	خروج از مرکز یک بیضی افقی $\frac{4}{5}$ ، مرکز آن $(-4,-1)$ و طول قطر کوچک این بیضی ۶ واحد است. مختصات دو سرقطر بزرگ بیضی را پیدا کنید.	۱
۱٤	معادله $x^2+y^2-2x-6y+f=0$ معادله دایره ای به شعاع ۲ با شد f را محاسبه کنید .	۱
۱۵	معادله دایره ای که مرکزش نقطه $w(3,-1)$ و از خط $2x-5y+18=0$ وتری به طول ۶ جدا کند را بنویسید .	۱
۱٦	۴۰% کارکنان یک شرکت را مردان و ۶۰% آن را زنان تشکیل می دهند ۲۰% مردان و ۳۵% زنان تحصیلات دانشگاهی دارند . فردی به تصادف انتخاب می کنیم احتمال آن که فرد مورد نظر تحصیلات دانشگاهی داشته باشد را تعیین کنید.	۱/۵
۱۷	اگر $P(A\cup B)=0/6$, $P(A)=0/2$, $P(B\|A)=0/1$ باشد ، آن گاه $P(B)$ را بیابید .	۱
بارم	موفق باشید	جمع ۲۰

ردیف	پاسخ نامه تشریحی آزمون ششم	نمره
۱	الف) ۱-  ب) ۲ چون $f(x)=-2x^2-4x+8 \Rightarrow R=f(-3)=-2(9)-4(-3)+8=2$ ج) انبساط عرضی یا کشش عرضی : چون k بزرگتر از ۱ و پشت f است انبساط عرضی داریم  د) ماکزیمم	
۲	$g(x)=\sqrt{x-1}\ ,\ f(x)=\frac{3x}{1-x^2} \Rightarrow D_g=[1,+\infty)\ ,\ D_f=R-\{\pm1\}$ $\sqrt{x-1}\neq1 \Rightarrow \sqrt{x-1}=1 \Rightarrow x=2$ $\sqrt{x-1}\neq-1 \Rightarrow$ غیر ممکنه $D_{fog}=\{x\in D_g \mid g(x)\in D_f\}=\{x\in[1,+\infty) \mid \sqrt{x-1}\neq\pm1\}=[1,+\infty)-\{2\}$	
۳	$\sin(\pi+x)\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)-2\sin(\pi-x)+1=0 \Rightarrow -\sin x(-\sin x)-2\sin x+1=0 \Rightarrow \sin^2 x-2\sin x+1=0$ $(\sin x-1)^2=0 \Rightarrow \sin x-1=0 \Rightarrow \sin x=1 \Rightarrow x=2k\pi+\frac{\pi}{2}$	
٤	$1)\lim_{x\to0^-}f(x)=-1$ $2)\lim_{x\to0^+}f(x)=1$ $3)\lim_{x\to-1}f(x)=-2$ $4)\lim_{x\to0^-}[f(x)]=[-1^-]=-2$	
۵	$1)\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3+2x-2}{-2x^3+x^2+3}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\cancel{x^3}}{-2\cancel{x^3}}=\frac{-1}{2}$ $2)\lim_{x\to2}\frac{x^3+x-10}{x^3-4x}=\frac{0}{0}\lim_{x\to2}\frac{\cancel{(x-2)}(x^2+2x+5)}{x\cancel{(x-2)}(x+2)}=\frac{13}{8}$	
٦	$1)f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}\left(\frac{1}{x}\right)+\sqrt{x}\left(\frac{-1}{x^2}\right)$ $2)g'(x)=4(2)(2x-3)^3(x^2+5x)+(2x+5)(2x-3)^4$ $3)h'(x)=\frac{-7}{2\sqrt{5-7x}}\left(4-\frac{x}{2}\right)+\left(\frac{-1}{2}\right)\sqrt{5-7x}$	
۷	$g'(2)=2\ ,\ g(2)=-3\ ,\ 2f'(2)=f(2)=3$ $(f\times g)'_2=f'_2\times g_2+g'_2f_2=\frac{3}{2}(-3)+2(3)=\frac{3}{2}$ $\left(\frac{f}{g}\right)'_2=\frac{f'_2\times g_2-g'_2f_2}{(g_2)^2}=\frac{\frac{3}{2}(-3)-2(3)}{2^2}=\frac{\frac{-21}{2}}{4}=\frac{-21}{8}$	
۸		
۹	$\frac{k(4)-k(0)}{4-0}=\frac{(2(4)^3+\sqrt{4})-0}{4}=\frac{130}{4}\quad,\quad k'(t)=6t^2+\frac{1}{2\sqrt{t}} \Rightarrow k'(1)=6+\frac{1}{2}=\frac{13}{2}$	

۱۰

$$y=\left||x|-2\right|=\begin{cases}-x-2 & x<-2\\ -(-x-2) & -2\le x<0\\ -(x-2) & 0\le x\le 2\\ x-2 & x>2\end{cases}\Rightarrow y'=\begin{cases}-1 & x<-2\\ 1 & -2\le x<0\\ -1 & 0\le x\le 2\\ 1 & x>2\end{cases}\Rightarrow\{-2,0,2\}$$ نقاط بحرانی تابع

x	-5	-2	0	2	3
$f'(x)$	$-\ \searrow$	$+\ \nearrow$	$-\ \searrow$	$+\ \nearrow$	
$f(x)$	3	0	2	0	1

ماکسیمم   مینیمم   مینیمم

۱۱

$2x+y=64 \Rightarrow p=xy=x(64-2x)=64x-2x^2 \Rightarrow p'_{(x)}=64-4x=0 \Rightarrow x=16$

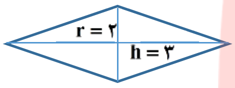
$p(16)=16(64-2(16))=512$

۱۲

الف) دو مخروط هم قاعده

ب) حجم حاصل میشه دو تا مخروط هم قاعده با ارتفاع $h=3$ و شعاع قاعده $r=2$ در نتیجه داریم :

$$2\left(\frac{\pi}{3}(2)^2(3)\right)=8\pi$$



۱۳

$O\begin{vmatrix}\alpha=-4\\ \beta=-1\end{vmatrix}\ ,\ b=3\ ,\ e=\frac{c}{a}=\frac{4}{5}\Rightarrow a^2=b^2+c^2\Rightarrow 1=\left(\frac{b}{a}\right)^2+\left(\frac{c}{a}\right)^2\Rightarrow\frac{3}{a}=\sqrt{1-\frac{16}{25}}=\frac{3}{5}\Rightarrow a=5\ ,\ c=4$

از راه اعداد فیثاغورسی هم میشد حدس زد

$A\begin{vmatrix}\alpha+a=-4+5=1\\ \beta=-1\end{vmatrix}\qquad A'\begin{vmatrix}\alpha-a=-4-5=-9\\ \beta=-1\end{vmatrix}$

۱۴

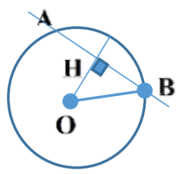
$R=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2-4c}\Rightarrow 2=\frac{1}{2}\sqrt{(-2)^2+(-6)^2-4f}\Rightarrow 4=\sqrt{40-4f}\Rightarrow 16=40-4f\Rightarrow f=6$

۱۵

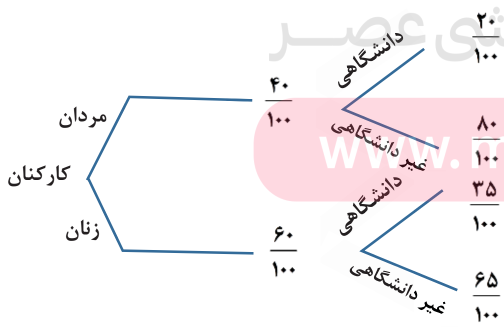
خطی که از مرکز دایره بر وتر وارد و بر آن عمود باشد ، آن را نصف می کند.

$$OH=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{|2(3)-5(-1)+18|}{\sqrt{4+25}}=\frac{29}{\sqrt{29}}\Rightarrow OH=\sqrt{29}$$

$$R^2=OH^2+(3)^2=29+9=38\Rightarrow R=\sqrt{38}\Rightarrow (x-3)^2+(y+1)^2=38$$



۱۶



$$p(D)=p(M)p(D|M)+p(Z)p(D|Z)=\frac{40}{100}\times\frac{20}{100}+\frac{60}{100}\times\frac{35}{100}$$

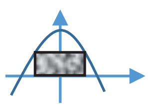
۱۷

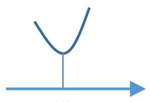
$P(A)=0/2\ ,\ P(B|A)=0/1=\frac{p(A\cap B)}{p(A)}\Rightarrow p(A\cap B)=0/1\times 0/2=0/02$

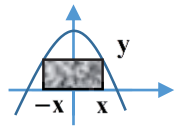
$P(A\cup B)=p(A)+p(B)-p(A\cap B)\Rightarrow p(B)=P(A\cup B)+p(A\cap B)-p(A)=0/6+0/02-0/2=0/42$

۲۰   جمع بارم   موفق باشید

سوالات امتحان درس:	رشته: تجربی	تعداد صفحه:۱	مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه
نام و نام خانوادگی:	دوره دوم متوسطه	تاریخ امتحان:	ساعت شروع:
دانش سراسر کشور در **نوبت خرداد** ماه سال ۱۳۹۸		آزمون هفتم : @kimia – mahan	

ردیف	سوالات	نمره
۱	درستی و نادرستی جملات زیر را بررسی کنید. الف) اگر $f(x)$ تابعی یک به یک باشد آنگاه $f^{-1}(x)$ لزوماً تابعی یک به یک نیست. ب) هر نقطه اکسترمم نسبی ، یک نقطه ی بحرانی است . ج) تابع تانژانت در هر بازه ای که در آن تعریف شده باشد اکیداً صعودی است. د) هرگاه استوانه قائم را با یک صفحه قطع دهیم بطوری که صفحه مایل باشد مقطع حاصل بیضی است .	۱
۲	اگر $g(x)=3x^2+x-1$, $f(x)=1-2x$ باشند جواب معادله $fog=-5$ را به دست آورید .	۱
۳	اگر $f(x)=x^2-6x-1$ در بازه $(-\infty,a]$ اکیداً نزولی باشد، حداکثر مقدار a را بیابید.	۱
٤	جواب های معادله $\sin 3x-\sin 2x=1+\cos\pi$ را تعیین کنید .	۱/۵
٥	حدود زیر را محاسبه کنید. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2-2x}{4-x}$, $\lim\limits_{x\to\frac{-1}{2}}\dfrac{[x]-2}{\lvert 2x+1\rvert}$, $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{x^2-1}$	۱/۵
٦	مشتق توابع زیر را بگیرید . (ساده کردن الزامی نیست) $h(x)=\sqrt[3]{x-1}+\dfrac{2}{x}-x^3+2x-1$ $g(x)=\dfrac{-3x+2}{x^2-3x+1}$ $f(x)=\sqrt{3x+2}\left(x^3+1\right)^2$	۲
٧	نقاط ۱ , $1+h$ روی نمودار تابع $y=x^2+x$ قرار دارند حد شیب خط گذرا از این دو نقطه وقتی که $h\to0$ را محاسبه کنید .	۱
۸	ضرائب b,a را در تابع $y=-x^4+ax+b$ چنان تعیین کنید که نقطه ی $(1,2)$ ماکزیمم نسبی تابع باشد .	۱
۹	نقاط بحرانی تابع با ضابطه ی $y=\left(x^3-3x^2\right)^{\frac{1}{3}}$ را بیابید .	۱
۱۰	ماکزیمم و می نیمم مطلق تابع $f(x)=2x^3-9x^2+12x+6$ را در بازه $[-2,3]$ را تعیین کنید .	۱/۵
۱۱	ماکزیمم محیط از مستطیل هایی که یک ضلع آن منطبق برمحور x ها و دو راس آن بر روی منحنی تابع $y=6-x^2$ قرار دارد را تعیین کنید . 	۱/۵
۱۲	معادله دایره ای بنویسید که مرکز آن $(-1,-1)$ و با دایره : $x^2+y^2-4x-6y=3$ مماس درون باشد .	۱/۵
۱۳	در یک بیضی مختصات دو سر قطر بزرگ $A(9,2)$, $A'(-1,2)$ است . اگر فاصله دو راس فرعی بیضی برابر ۸ باشد خروج از مرکز و مختصات دو سر قطر کوچک بیضی را محاسبه کنید .	۱/۵
١٤	یک سکه را پرتاب می کنیم اگر پشت بیاید ۳ سکه دیگر را با هم پرتاب می کنیم در این آزمایش احتمال اینکه دقیقاً یک سکه رو ظاهر شود چقدر است ؟	۱
١٥	دو کیسه یکسان داریم کیسه اول ۴ مهره سفید و ۶ مهره سیاه و کیسه دوم شامل ۵ مهره سفید و ۷ مهره سیاه است از کیسه اول به تصادف یک مهره بر می داریم و در کیسه دوم قرار می دهیم سپس یک مهره از کیسه دوم انتخاب می کنیم با چه احتمالی این مهره سفید است ؟	۱/۵
١٦	الف) اگر صفحه p با مولد سطح مخروطی موازی باشد و از راس آن عبور نکند شکل حاصل .... است ۱)هذلولی ۲)دایره ۳)سهمی ۴)بیضی ب) یک مستطیل به طول ۵ و عرض ۴ را حول عرض آن دوران می دهیم؛ حجم جسم حاصل کدام است؟ ۱) 64π ۲) 81π ۳) 100π ۴) 121π	۱
	موفق باشید جمع بارم	۲۰

<table>
<tr><th>ردیف</th><th>پاسخ نامه تشریحی آزمون ۷</th><th>نمره</th></tr>
<tr><td>۱</td><td>الف) نا درست   ب) درست   ج) درست   د) درست</td><td></td></tr>
<tr><td>۲</td><td>$f(x)=1-2x\ ,\ g(x)=3x^2+x-1 \Rightarrow fog(x)=1-2(3x^2+x-1)=-6x^2-2x+3=-5$
$-6x^2-2x+3=-5 \Rightarrow 6x^2+2x-8=0 \Rightarrow x=1\ ,\ x=\frac{-8}{6}=\frac{-4}{3}$</td><td></td></tr>
<tr><td>۳</td><td>راس سهمی : $f(x)=x^2-6x-1 \Rightarrow x=\frac{-B}{2A}=\frac{6}{2}=3$ و چون $A=1>0$ بنابراین تابع در بازه $(-\infty,3]$ نزولی است و در بازه $[3,+\infty)$ صعودی است در نتیجه حداکثر مقدار a ، ۳ خواهد بود .

۳</td><td></td></tr>
<tr><td>۴</td><td>$\sin 3x-\sin 2x=1+\cos\pi \Rightarrow \sin 3x-\sin x=0 \Rightarrow \sin 3x=\sin x \Rightarrow \begin{cases}3x=2k\pi+x\\ 3x=2k\pi+\pi-x\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=k\pi\\ x=\frac{2k\pi+\pi}{4}\end{cases}$</td><td></td></tr>
<tr><td>۵</td><td>1) $\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x}-1}{x^2-1}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x}-1}{x^2-1}\times\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1}=\lim_{x\to1}\frac{\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-1)}(x+1)\sqrt{x}+1}=\frac{1}{4}$
2) $\lim_{x\to-\frac{1}{2}}\frac{[x]-2}{|2x+1|}=\lim_{x\to-\frac{1}{2}}\frac{-1-2}{|2x+1|}=\frac{-3}{0^+}=-\infty$
3) $\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-2x}{4-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{-x}=\frac{x}{-1}=+\infty$</td><td></td></tr>
<tr><td>۶</td><td>1) $f(x)=\sqrt{3x+2}\,(x^3+1)^2 \Rightarrow f'(x)=\frac{3}{2\sqrt{3x+2}}(x^3+1)^2+2(3x^2)(x^3+1)\sqrt{3x+2}$
2) $g(x)=\frac{-3x+2}{x^2-3x+1} \Rightarrow g'(x)=\frac{-3(x^2-3x+1)-(2x-3)(-3x+2)}{(x^2-3x+1)^2}$
3) $h(x)=\sqrt[3]{x-1}+\frac{2}{x}-x^3+2x-1 \Rightarrow h'(x)=\frac{1}{3\sqrt[3]{(x-1)^2}}-\frac{2}{x^2}-3x^2+2$</td><td></td></tr>
<tr><td>۷</td><td>$f(x)=x^2+x \Rightarrow \lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{(1+h)^2+(1+h)-2}{h}=\lim_{h\to0}\frac{h^2+3h}{h}=\lim_{h\to0}\frac{\cancel{h}(h+3)}{\cancel{h}}=3=f'(1)$
عملاً مشتق تابع در نقطه $x=1$ رو می خواد که باید از راه تعریف مشتق بریم</td><td></td></tr>
<tr><td>۸</td><td>اولاً مختصات نقطه $(1,2)$ باید در تابع صدق کند و ثانیاً طول این نقطه باید مشتق اول تابع را صفر نماید.
$f(x)=-x^4+ax+b \Rightarrow \begin{cases}f(1)=-1+a+b=2 \Rightarrow a+b=3 \Rightarrow b=-1\\ f'(x)=(-4x^3+a)_{x=1}=0 \Rightarrow -4+a=0 \Rightarrow a=4\end{cases}$</td><td></td></tr>
<tr><td>۹</td><td>$y=(x^3-3x^2)^{\frac{1}{3}} \Rightarrow y'=\frac{3x^2-6x}{3\sqrt[3]{(x^3-3x^2)^2}} \Rightarrow$
$y'=0 \quad 3x(x-2)=0 \Rightarrow x=0\ ,\ x=2$
y' کجا وجود ندارد $x^3-3x^2=x^2(x-3)=0 \Rightarrow x=0\ ,\ x=3$</td><td></td></tr>
<tr><td>۱۰</td><td>$f(x)=2x^3-9x^2+12x+6 \Rightarrow f'(x)=6x^2-18x+12=0 \Rightarrow x=1\ ,\ x=2$
<table>
<tr><td>x</td><td>۲-</td><td>۱</td><td>۲</td><td>۳</td></tr>
<tr><td>$f(x)$</td><td>۷۰-</td><td>۱۱</td><td>۱۰</td><td>۱۵</td></tr>
</table>
مینیمم مطلق   ماکسیمم مطلق</td><td></td></tr>
</table>

	$S=2xy=2x\sqrt{6-x^2} \Rightarrow S'(x)=2\left(\sqrt{6-x^2}+x\frac{-2x}{2\sqrt{6-x^2}}\right)=2\left(\frac{6-x^2-x^2}{\sqrt{6-x^2}}\right)=0$ $6-2x^2=0 \Rightarrow x=\pm\sqrt{3} \Rightarrow S_{\sqrt{3}}=2\sqrt{3}\times\sqrt{6-3}=6$  	۱۱
	$x^2+y^2-4x-6y-3=0$, $O\left\lvert\begin{array}{l}\alpha=\frac{4}{2}=2\\ \beta=\frac{6}{2}=3\end{array}\right.$ $\Rightarrow R_1=\frac{1}{2}\sqrt{16+36+12}=4$, $\lvert O_1O_2\rvert=d=\sqrt{(2+1)^2+(3+1)^2}=5$ $d=\lvert R_2-R_1\rvert=\lvert R_2-4\rvert=5 \quad R_2=9 \Rightarrow (x+1)^2+(y+1)^2=81$	۱۲
	$O\left\lvert\begin{array}{l}\frac{9-1}{2}=4\\ 2\end{array}\right.$ $\Rightarrow \lvert A'A\rvert=2a \Rightarrow \lvert 9-(-1)\rvert=2a \Rightarrow a=5$, $2b=8 \Rightarrow b=4 \Rightarrow c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{25-16}=3$ $e=\frac{c}{a}=\frac{3}{5}$, $B'\left\lvert\begin{array}{l}\alpha=4\\ \beta-b=2-4=-2\end{array}\right.$ $B\left\lvert\begin{array}{l}\alpha=4\\ \beta+b=2+4=6\end{array}\right.$	۱۳
	$S=\{r,pppp,pppr,pprp,prpp,prrp,prpr,pprr,prrr\}$ $A=\{r,pppr,pprp,prpp\}$ می دونی که پرتاب هر سکه از سکه دیگر مستقله به خاطر همین برای محاسبه ، احتمال ها شونو رو در هم ضرب می کنیم $P(A)=(\frac{1}{2})+(\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2})+(\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2})+(\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2})=\frac{1}{2}+3\left(\frac{1}{16}\right)=\frac{11}{16}$	۱٤
	مهره انتقاب شده از جعبه اول یاسفید است با احتمال $p(w)=\frac{4}{10}$ ویا سیاه با احتمال $p(b)=\frac{6}{10}$ از طرفی پیشامد انتقاب مهره سفید از جعبه دوم را با A نشان می دهیم و داریم $p(A\|w)=\frac{6}{13}$ و $p(A\|b)=\frac{5}{13}$ در این صورت احتمال آن که مهره خارج شده سفید باشد برابر است با : $p(A)=p(w)p(A\|w)+p(b)p(A\|b)=\frac{4}{10}\times\frac{6}{13}+\frac{6}{10}\times\frac{5}{13}$	۱۵
	الف) ۳ ب) ۳ الف) شکل حاصل سهمی است . ب) حجم حاصل یک استوانه به شعاع ۵ و با ارتفاع ۴ خواهد بود . $V=\pi(r)^2h=\pi(5)^2 4=100\pi$	۱٦
۲۰	جمع بارم موفق باشید	